Una historia sobre números irracionales

Miguel Galo Fernández

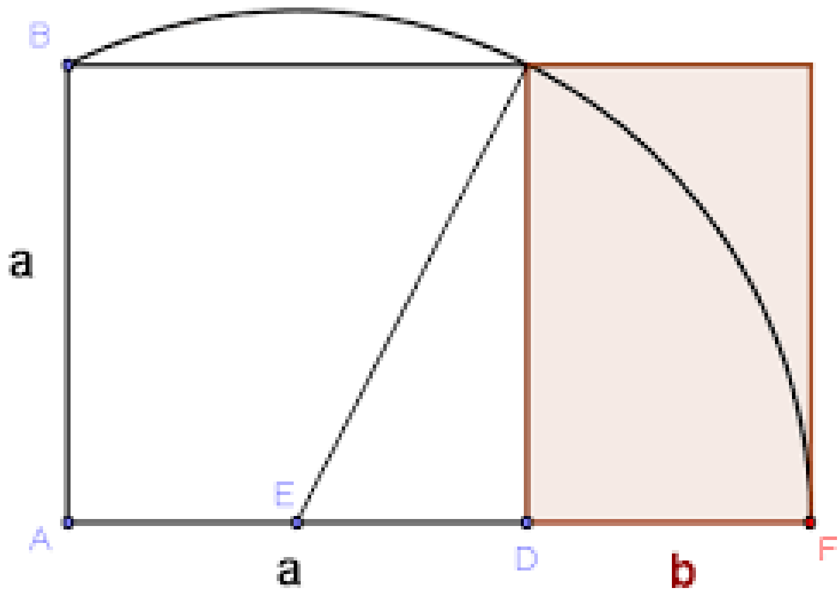


Figura 1: El cuadrado de oro

Índice de Contenidos

1. Los pitagóricos

1.1. La isla de Samos

Pitágoras nació en la isla griega de Samos, aproximadamente en el año 590 A.C. El mar Egeo es un brazo de Mediterráneo plagado con más de 400 islas. Esta es la cuna de la Civilización Griega, aquí se encuentra la isla de Samos. Actualmente es uno de los destinos turísticos más demandados en Grecia, también famosa por la abundancia y la calidad de su pescado. Según el historiador Herodoto el puerto de la isla de Samos tenía un rompeolas subterráneo que dificultaba el paso de posibles invasores, hoy no queda resto alguno de esta estructura. Otro de los misterios de Samos es el Hereo, construido hace más de 2.600 años. Se trata de un templo construido a la diosa Hera, esposa de Zeus. La construcción de esta gigantesca estructura se debe al tirano Polícrates, conocido tanto por su astucia como por su crueldad. Pitágoras tuvo que abandonar la isla porque no podía soportar el brutal gobierno de Policrates quien fue a la par de tirano, gran defensor de la ciencia y la cultura. Otra gran obra de este tirano fue el túnel de Eupalinos, de dos metros de ancho por dos de alto, excavado por mano del hombre sin lugar a duda. Por la base del túnel circulaba una corriente de agua. El castillo del tirano se encontraba en una macizo muy alto y el descenso del agua lo impedía otro macizo que se encontraba en el centro de la isla. Esto fue un quebradero de cabeza para Polícrates que no quería perder la ventaja estratégica que le proporcionaba la altura, si hubiera optado por construir el Castillo en un valle. Ante un asedio o invasión el agua le era imprescindible. Por eso decidió cavar un túnel para llevar agua desde la zona norte de la isla (Agiades) hasta el sur. El Túnel tiene una longitud de 1.036 metros cavados en línea recta.

Figura 2: El Hereo

Es indudable que necesitaron conocimientos matemáticos para cavar en línea recta y a la misma altura las dos entradas/salidas del túnel de Eupalinos. Emplearon el método de Herón de semejanza de triángulos para determinar la dirección de la excavación. Para determinar la altura a la que debían cavar emplearón tuberías con agua que indicaban cuando de alcanzaba el mismo nivel. Cuando se encontraron los trabajadores que comenzaron su trabajo desde cada uno de los puntos de entrada/salida cometieron un error en la altura de tan solo 60 cm. Estos conocimientos los adquirieron de la cultura egipcia, en Egipto estaba muy adelantada en aquella época la arquitectura. A su vez, los egipcios conocían el llamado Teorema de Pitágoras a través de su contacto con una cultura muy antigua del valle del Indo. Es evidente que el teorema atribuido a Pitágoras no era suyo aunque pueda tener el mérito de ser su principal difusor. Como ya hemos mencionado Pitágoras abandonó la Isla de Samos y se dirigió a la Magna Grecia (sur de Italia), concretamente a la ciudad de Crotona

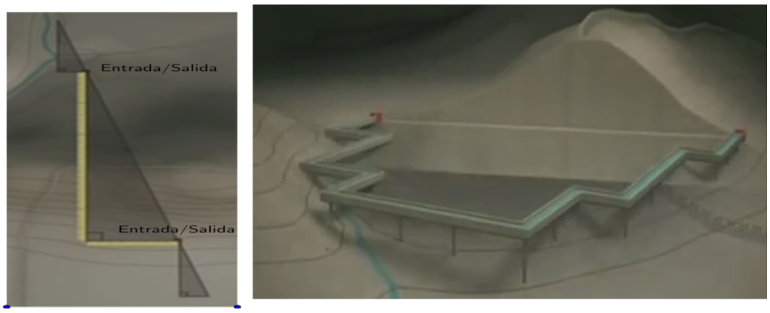


Figura 3: Método de Herón

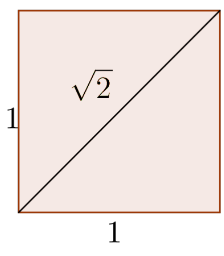
1.2. La ciudad de Crotona

Pitágoras fundó en esta ciudad su escuela filosófico- mística. En relidad se trataba de una secta cerrada. Para los Pitagóricos era muy importante la enseñanza de las matemáticas y la música. Guardaban con celosamente secreto de sus conocimientos. Creían en la reencarnación y en la inmortalidad del alma. No les estaba permitido recoger objetos del suelo cuando se les caían de las manos, orinar mirando al Sol o comer alubias y habas. En sus desarrollos metafísicos afirmaban que el mundo se regía por medio de los números que manifestaban la armonia del universo. Esta armonia se entendía como relaciones de proporción, lo que equivale a decir que para los pitagóricos sólo existían números racionales (fracciones que indican la proporción de una cantidad con otra).

Pitágoras se centró en la dirección de la escuela y en la enseñanza, pero pronto la desgracia se cerniría sobre ella. La envidia y la intolerancia hizo que algunos individuos que no fueron admitidos en la escuela por no alcanzar el nivel exigido, perpetraran un crimen. Entraron saqueando, destruyendo e incendiando lo que encontraban a su paso: edificios, papiros, jardines... incluso mataron a muchos que no habían podido refugiarse. Pitágoras pudo escapar con algunos de sus discípulos, refugiándose en la Ciudad de Metaponto, que se encuentra también en la Magna Grecia.

1.3. Ciudad de Metaponto

Aquí vivió Pitágoras hasta el final de sus días, murió a los ochenta años. Uno de los discípulos de Pitágoras, Hipasus, era de esta ciudad. Hipasus de Metaponto descubrío un gran fallo en las enseñanzas pitagóricas: existían segmentos inconmensurables, es decir segmentos que no se podían medir con números (recordemos que los Pitagóricos mantenían que el campo numérico más extenso lo formaban las fracciones). Por ejemplo la diagonal de un cuadrado de lado 1 es un segmento inconmensurable. Veamos como llegó a ello.

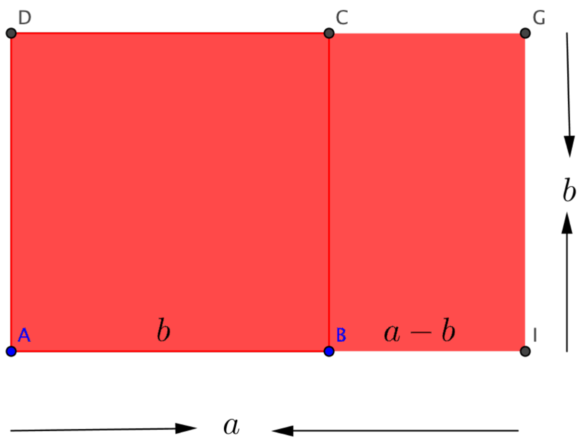


Según el Teorema de Pitágoras la diagonal de este cuadrado es $\sqrt{2}$. Por reducción al absurdo, supongamos que la diagonal del cuadrado es conmensurable, entonces se podría expresar como una fracción, es decir que podríamos poner $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ y sin pérdida de generalidad, podemos suponer que esta fracción es irreducible. Si elevamos al cuadrado ambos términos de la igualdad tenemos que $2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 2b^2 \Rightarrow a^2$ es un número par, por tanto a es par (si a no fuera par sería de la forma $a = 2k + 1 \Rightarrow a^2 = 4k^2 + 4k + 1$, a^2 también sería impar).Si a es par es de la forma $a = 2k \Rightarrow a^2 = 4k^2 \Rightarrow 4k^2 = 2b^2 \Rightarrow b^2 = 2k^2$ por tanto b tambien sería par. Si a y b fueran pares la fracción $\frac{a}{b}$ sería reducible que es una contradición con lo que hemos supuesto. Luego $\sqrt{2}$ no es racional y por tanto es inconmensurable. Cuenta la leyenda que la revelación de este secreto, que demostraba la falsedad de la metafísica de Pitágoras, costó la vida a Hipasus que fue arrojado por la borda de la nave en donde paseaban los miembros de la secta.

2. El número de oro

2.1. Rectángulos de oro

El rectángulo es una de las figuras geométricas más utilizadas. Los campos en donde se celebran las competiciones de los principales deportes son rectangulares, las tarjetas de crédito y el DNI son rectángulos, los billetes, las tablets, las pantallas de ordenadores, etc, son rectangulares. Dentro del conjunto de los rectángulos hay una clase muy especial, es la clase de los rectángulos aureos. ¿Qué es un rectángulo aureo? Es el rectángulo que tiene la propiedad de que al segregar de él el cuadrado de área máxima, el rectángulo que se obtiene es semejante a dicho rectángulo. Supongamos que el siguiente rectángulo es aúreo:



Al ser semejantes los rectángulos AIGD y BIGC, sus lados homólogos son proporcionales, es decir que verifican $\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b} \Rightarrow a^2 - ab = b^2 \Rightarrow a^2 - ab - b^2 = 0$. Si dividimos esta igualdad por b^2 obtenemos la expresión $\frac{a^2}{b^2} - \frac{a\cancel{b}}{b^{\cancel{2}}} - \frac{b^2}{b^2} = 0 \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0$. Si hacemos el cambio de variable $x = \frac{a}{b}$ obtenemos la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$ que si resolvemos por medio de la fórmula de Baskara se obtiene $x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$. Al tratarse de longitudes, no tiene sentido la solución negativa, solo es válida la solución $x = \frac{1+\sqrt{1+4}}{2} = \Phi$, a este número se le conoce con el nombre de número aúreo o de oro y se representa por la letra Φ (fi en griego). Podemos afirmar que los rectángulos aúreos se caracterizan porque el cociente entre su lado mayor y su lado menor es el número aúreo Φ.

¿Cómo se construye un rectángulo aúreo? Fijémonos en la ssiguiente figura:

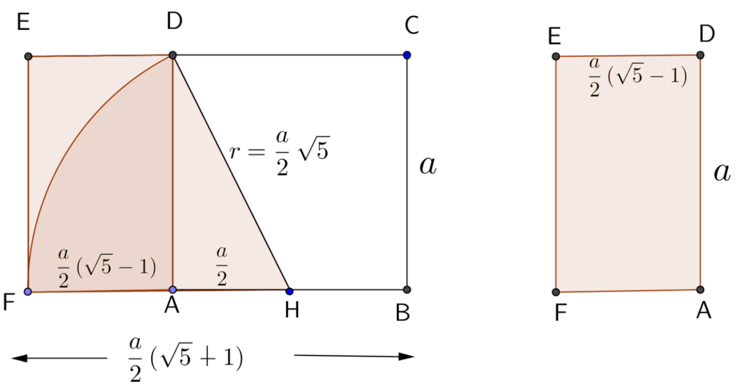


Figura 4: Construcción del rectángulo de oro

1. Trazamos un cuadrado ABCD de lado a .
2. Sea H el punto medio del lado AB .
3. Con centro H y radio $r = HD$ trazamos el arco que pasa por D y que corta a la prolongación del lado AB en el punto F.
4. Con los puntos ADF construimos el rectángulo ADEF.

El rectángulo FBCE es aúreo ya que es semejante al rectángulo ADEF. Si k es la constante de proporcionalidad entre los lados de ADEF y los de FBCE, entonces se verifica, por semejanza, que $k\cancel{a} = \frac{\cancel{a}(1+\sqrt{5})}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$, a este número se le conoce como número de oro. Φ es un número irracional.

2.2. La espiral de Durero

Se puede observar aquí Alberto Durero. Esta espiral la obtenemos generando, de modo indefinido, cuadrados aúreos segregando el cuadrado de área máxima en cada uno de estos rectángulos y, trazando arcos de 90º en cada uno de los rectángulos segregados tal y como se muestra en el vídeo.

2.3. La diagonal del pentágono regular

La diagonal de un pentágono regular tiene como longitud el número de oro. Para demostrar esto consideramos, sin pérdida de generalidad, que la longitud del lado del pentágono es 1. Llamamos Φ a la diagonal del pentágono.

Los triángulos de vértices EDC y EAB son semejantes ya que ambos son isósceles y tienen un ángulo igual (el ángulo opuesto por el vértice α). Por semejanza se obtiene que $\frac{\Phi}{1} = \frac{1}{\Phi - 1}$. Desarrollando esta ecuación se obtiene que $\Phi^2 - \Phi = 1 \Rightarrow \Phi^2 - \Phi - 1 = 0$ y resolviendo esta ecuación de 2º grado obtenemos $\Phi = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ Al tratarse de longitudes no es

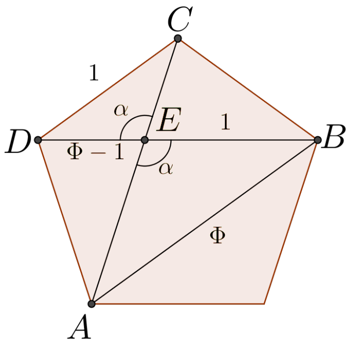
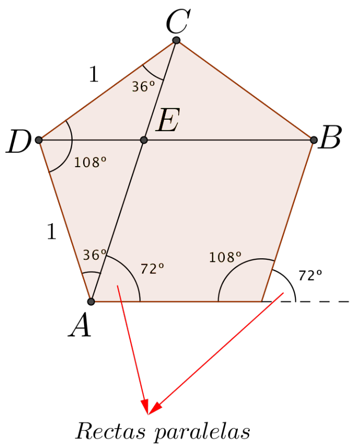


Figura 5: El número de oro

admisible la solución negativa con lo que $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Hemos supuesto, en la demostración que acabamos de hacer, que la recta AC es paralela a la recta que contiene al lado que pasa por B. La razón se expone en la siguiente figura:



3. Irracionales algebraicos y transcendentes

Los números irracionales algebraicos son aquellos que se pueden obtener como solución de una ecuación. Por ejemplo $\sqrt{2}$ es un irracional algebraico ya que es solución de la ecuación $x^2 - 2 = 0$. Al tener $\sqrt{2}$ infinitos decimales no periódicos, no es representable mediante un número decimal ya que ello supondría admitir que este número es una fracción. Sí que podemos representar en la recta real la longitud de un segmento de longitud $\sqrt{2}$. Veamos como. Trazamos los ejes coordenados y mediante un segmento unimos el origen de coordenadas O(0,0) con el punto P. Entonces la longitud del segmento OP, aplicando el teorema de Pitágoras, es $\sqrt{2}$. Con centro O y radio OP trazamos un arco que cortará al eje X en un punto Q. La longitud del semento OQ es $\sqrt{2}$, que como se ve en la gráfica es un número comprendido entre 1 y 2.

En general si $p \in \mathbb{Z}$ es un número primo entonces $\sqrt{p}$ es un irracional algebraico.

Los números irracionales transcendentes son aquellos números irracionales, que tendrán infinitas cifras decimales no periódicas, que no son solución de una ecuación. Por ejemplo π es un irracional transcendente. Demostrar este resultado pertenece a la matemática superior, no podemos dar a este nivel una demostración de este resultado. En 1882 el matemático alemán Lindeman demostró que π es transcendente.

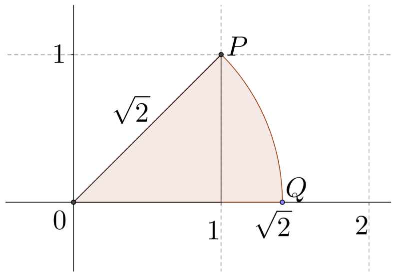


Figura 6: Construcción con regla y compás de $\sqrt{2}$

Un número real es construible con regla y compás si y solo si es solución de una ecuación algelbraica con coeficientes construibles, de grado a lo sumo 2, este es un resultado muy potente de la matemática superior.

A primera vista nos puede parecer que son más abundantes lo irracionales algebraicos que los irracionales transcendentes, eso no es así. El matemático alemán George Cantor demostró que los irracionales algebraicos se pueden contar (esto quiere decir que hay tantos números irracionales algebraicos como números naturales). Los irracionales transcendentes no se pueden contar (hay tantos como números reales).

4. La cuadratura del círculo

A lo largo de nuestra vida todos hemos oido mencionar, en diferentes contextos, el problema de la cuadratura del círculo. ¿En qué consiste este problema? Pues en hallar el lado de un cuadrado cuya superficie sea igual a la de un círculo de radio dado, determinando este lado utilizando tan solo regla y compás. Si el círculo tiene radio r, su área vale πr^2. Sea l el lado del cuadrado que queremos hallar, el que tiene área πr^2. Generamos así la ecuación $l^2 = \pi r^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow l = r\sqrt{\pi}$. Si el lado es $l = r\sqrt{\pi}$, ¿dónde está el problema? El problema está en que este lado no se puede construir con regla y compás. Veamos esto. Recordemos que hemos dicho que Lindeman demostró que π es transcendente, es decir que no se puede construir con regla y compás al no ser solución de una ecuación algelbraica con coeficientes construibles, de grado a lo sumo 2. Veamos que $\sqrt{\pi}$ tampoco es construible. Por reducción al absurdo, si $\sqrt{\pi}$ fuera construible, sería solución de una ecuación del tipo $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow a\pi + b\sqrt{\pi} + c = 0 \Rightarrow$. Llamando $d = b\sqrt{\pi} + c$, que es construible, nos queda que $a\pi + d = 0$ lo cual es una contradición, ya que π sería solución de la ecuación algebraica con coeficientes construible $ax + d = 0$, en contra de lo que demostró Lindeman π sería construible. Al no poder ser construible $\sqrt{\pi}$, tampoco puede ser construible el lado l del cuadrado. Para sorpresa nuestra, a pesar de que en el siglo pasado se demostró la imposibilidad de la cuadratura del círculo, aun siguen apareciendo "cuadracírculos"por doquier, su prepotencia les impide informarse y saber en qué términos debe resolverse el problema.

Los números irracionales algebraícos sí son construibles, lo hemos visto anteriormente con la construcción del segmento de longitud $\sqrt{2}$ (figura 11)

5. La matemática aplicada al mundo real

Los griegos no earn muy dados a relacionar las matemáticas (una parte de la filosofía) con el mundo real. Uno de los pocos que se atrevieron a hacerlo en la Grecia clásica fue Arquímedes y por ello, a pesar de su enorme grandeza e inteligencia, fue considerado un chapucero. Pero nos podemos llevar alguna sorpresa cuando aplicamos en nuestra vida diaria los resultados matemáticos. Unos matemáticos coreanos situaron, sobre la superficie de un estadio olímpico, un triángulo rectángulo de 8 y 15 metros de catetos y de 17 metros de hipotenusa tal y como indica la figura:

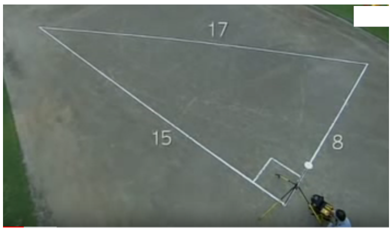


Figura 7: El teorema de Pitágoras $15^2 + 8^2 = 17^2$

El Teorema de Pitágoras funciona perfectamente. Desde este estadio, en Corea del Sur, ayudados por satélites, se tiró una línea hasta la isla de Samos (tierra donde nació Pitágoras). Desde la isla de Samos, en ángulo recto, nos desplazamos hasta la sabana del Congo. Se formó así un gigantesco triángulo rectángulo terrestre cuyos lados se muestran en la figura siguiente:

Figura 8: no se verifica el teorema de Pitágoras

Como observamos en la figura anterior, aparentemente no se verifica el Teorema de Pitágoras, ¿qué ocurre? Estamos suponiendo una linea recta entre un punto situado en Corea del Sur y otro situado en la Isla de Samos, esa recta es imposible ya que tendriamos que perforar la Esfera terrestre para conseguirla. A diferencia de lo que ocurre en el plano, sobre la esfera la distancia más corta entre dos puntos no es la recta que une a esos puntos, sino la longitud del arco del círculo que los une. En realidad tendríamos, en vez del triángulo plano de la figura anterior, en siguiente triángulo esférico:

Figura 9: triángulo Corea-Samos-Congo

6. Aproximación de los números irracionales

Un número irracional es imposible expresarlo como un número decimal, ya que el irracional tiene infinitas cifras decimales no periódicas. Si ponemos, por ejemplo, que la raiz de dos se puede expresar como $\sqrt{2} = 1{,}414213562373095$ estamos limitando el campo numérico, vivimos 2500 años antes de Cristo, pensamos los números tal y como lo hacía Pitágoras, perseguimos también a Hipasus de Metaponto al poner que $\sqrt{2} = \frac{1414213562373095}{10^{15}}$. ¿Cómo debemos expresar un número irracional? La mejor forma de expresar la raiz cuadrada de tres es mediante el símbolo $\sqrt{3}$, cualquier expresión decimal que empleemos para representar este valor es una aproximación que no expresa su verdadero valor. El número pi se representa por el símbolo π, no hay otra representación que indique exactamente su valor, si intentamos expresarlo con un decimal damos una aproximación al número pi que nada tiene que ver con el valor exacto π. Si consideramos buena una aproximación de la longitud de la circunferencia por medio del perímetro de un dodecágono como el que muestra la figura:

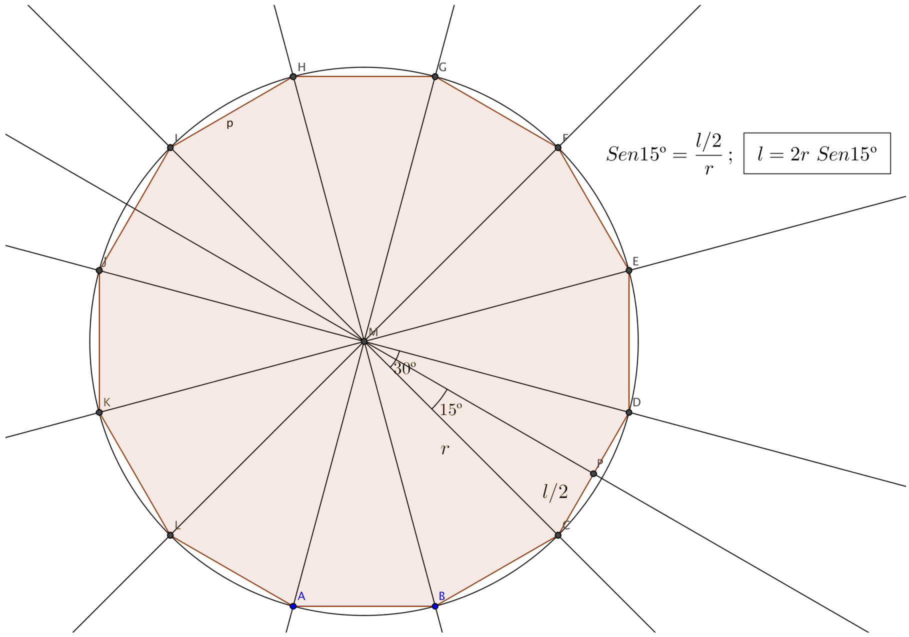


Figura 10: Aproximación de la longitud de la circunferencia al perímetro del dodecágono

Tenemos entonces que $2l = 24rSen15^o = 2\pi r \Rightarrow \pi = 12Sen15^o \simeq 3{,}105828541230$. Si aproximáramos por un polígono regular de 24 lados la aproximación sería $\pi \simeq 24sen7{,}5^o =$ $= 3{,}132628613228$, como vemos esta última aproximación es bastante buena, la gráfica lo demuestra:

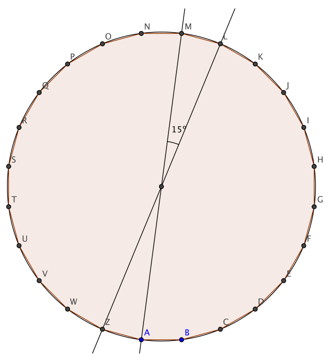


Figura 11: Polígono de 24 lados