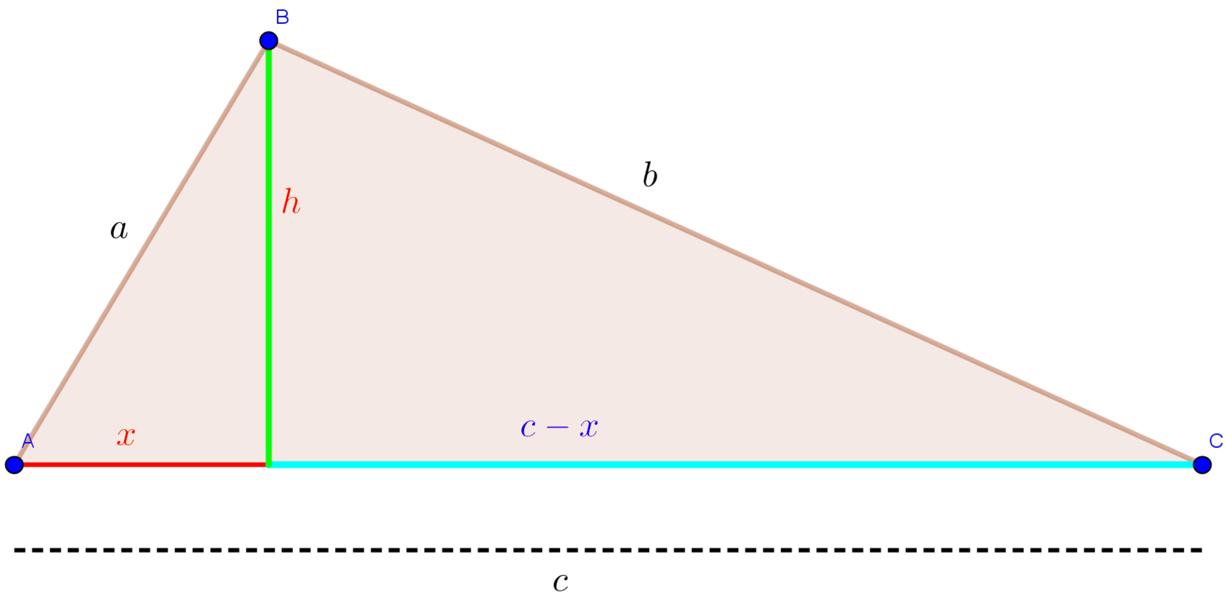
EL SINSENTIDO DE LA FÓRMULA DE HERÓN EN 3º DE ESO

Miguel Galo Fernández

Los recetarios para el cálculo de áreas de triángulos con lápiz y papel no debieran tener cabida en la enseñanza actual. Si no se sabe lo que se está haciendo y tampoco se pretende otra cosa que el cálculo, hay software que resuelve el problema de una forma más rápida y eficiente. Por ejemplo con Geogebra (software de código abierto disponible gratuitamente también en español, para usos no comerciales) se puede hallar el área de un triángulo conocidos sus vértices A, B y C. Escribiendo el comando área[A,B,C], al pulsar enter, nos devuelve la superficie del referido triángulo. Ni con aritmética de lápiz y papel ni utilizando Geogebra el alumno sabe lo que está haciendo. La ventaja que tiene la utilización del referido programa es la rapidez y precisión frente al resultado con lápiz y papel.

Yo creo que no deben transmitirse conocimientos matemáticos que no puedan ser demostrados a los alumnos salvo en contadas ocasiones (por la gran complicidad o dificultad de la demostración). El aprendizaje en matemáticas debe estar basado en el razonamiento y justificación de todo lo que se afirma, despejando todas las dudas que puedan surgir respecto a la veracidad de lo que se expone.

¿Por qué no se demuestra la fórmula de Herón en los libros de texto?, ¿tampoco la demuestran la mayoría de los profesores de matemáticas? Por lo que he podido comprobar los profesores de matemáticas de 3º de ESO no demuestran la fórmula. ¿Qué estamos haciendo? Para demostrar la fórmula de Herón se necesita conocer el teorema de Pitágoras y manejar con soltura la igualdad notable de suma por diferencia igual a diferencia de cuadrados, conocimientos que se adquieren en Educación Primaria. Hay una demostración que usa el teorema del coseno que es bastante fácil, pero como ese teorema no pertenece a conocimientos de ESO voy a mostrar otra demostración sencilla. Sea el triángulo que muestra la figura siguiente:



h es la altura que corresponde al lado c del triángulo. Si aplicamos el teorema de Pitágoras a los dos triángulos rectángulos que tienen como cateto a h obtenemos que:

$a^2 = x^2 + h^2 \Rightarrow \boxed{h^2 = a^2 - x^2}$ y también $b^2 = (c-x)^2 + h^2 \Rightarrow \boxed{h^2 = b^2 - (c-x)^2}$

Si igualamos las expresiones que están entre paréntesis (ambas son h^2): $a^2 - x^2 = b^2 - (c-x)^2$

Desarrollando se tiene: $a^2 - \cancel{x^2} = b^2 - c^2 + 2cx - \cancel{x^2} \Rightarrow x = \dfrac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}$. De una de las expresiones recuadradas anteriormente se obtiene que $h = \sqrt{a^2 - x^2}$ y si sustituimos el valor $x = \dfrac{a^2 - b^2 + c^2}{2c} \Rightarrow h = \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}\right)^2} \Rightarrow h = \sqrt{a^2 - \dfrac{(a^2 - b^2 + c^2)^2}{(2c)^2}} \Rightarrow$
$\Rightarrow h = \sqrt{\dfrac{a^2(2c)^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2}{(2c)^2}} = \dfrac{1}{2c}\sqrt{(2ac)^2 - (a^2 - b^2 + c^2}$. Si hacemos uso de las igualdades notables obtenemos la expresión de h:

$h = \dfrac{1}{2c}\sqrt{(2ac + a^2 - b^2 + c^2)(2ac - a^2 + b^2 - c^2)} = \dfrac{1}{2c}\sqrt{[(a+c)^2 - b^2][b^2 - (a-c)^2]}$ Si aplicamos de nuevo igualdades notables tenemos:

$h = \dfrac{1}{2c}\sqrt{(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)}$. Si denotamos por p al semiperímetro del triángulo, es decir $p = \dfrac{a+b+c}{2} \Rightarrow a+b+c = 2p$, tenemos que :

- $p - b = \dfrac{a+b+c}{2} - b = \dfrac{a-b+c}{2} \Rightarrow a - b + c = 2(p-b)$ y de la misma forma
- $a + b - c = 2(p-c)$, $b + c - a = 2(p-a)$

Sustituyendo estos valores en la expresión $h = \dfrac{1}{2c}\sqrt{(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)}$ nos queda que $h = \dfrac{1}{2c}\sqrt{2p2(p-a)2(p-b}2(p-c) = \dfrac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. La expresión del área del triángulo es $A = \dfrac{1}{2}ch = \dfrac{1}{\cancel{2}}\cancel{c}\dfrac{\cancel{2}}{\cancel{c}}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Por tanto la expresión del área del triángulo viene dada por $\boxed{A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$ que es la fórmula de Herón.

Cuando se omite o no se muestra la demostración, el alumno adquiere también el convencimiento de que las matemáticas son un cuerpo dogmático. Por definicion dogma es algo que se cree. Muchisimas veces , casi siempre, el dogma se refiere a una argumentacion basada en la autoridad de algo/alguien. Creo que este matiz es muy importante, porque las matemáticas no se mueven por argumentos de autoridad. La matemática no está concebida para ser memorizada...solo a través del razonamiento, y no de cosas que se deben creer porque sí, se puede ser creativo porque se entienden las cosas. Sin entendimiento no hay creación y en matemáticas si no se crea no se puede aprender.