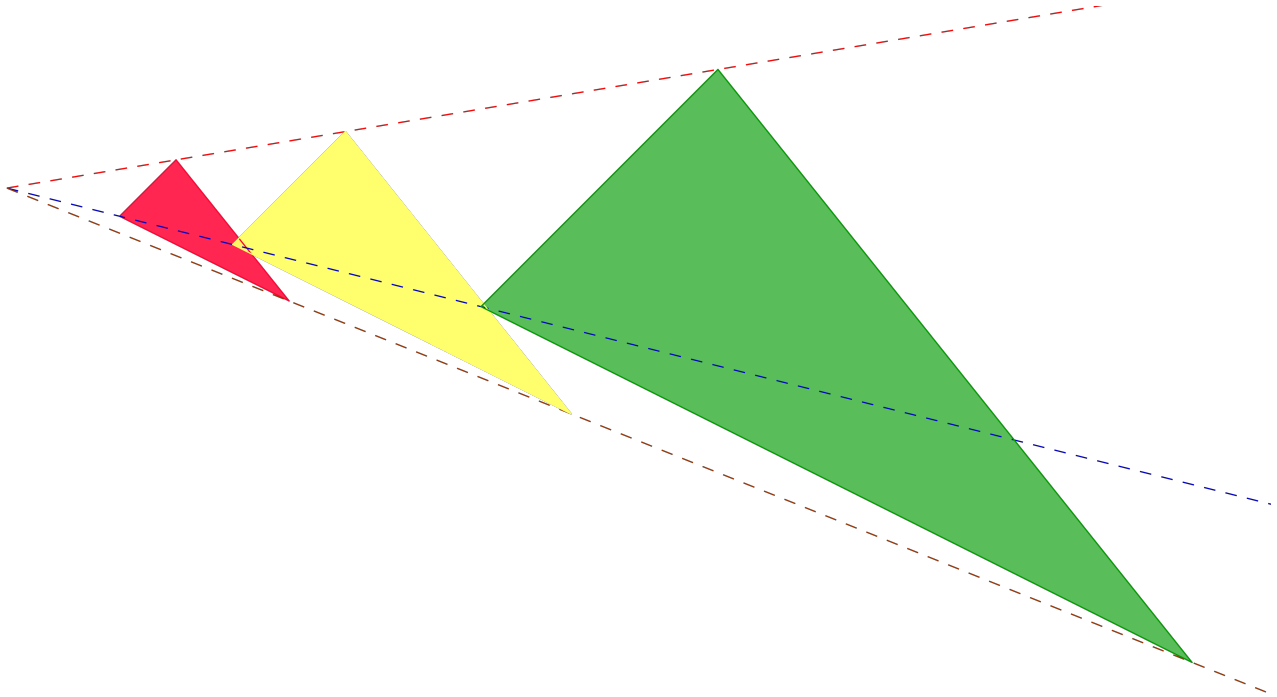
Geometría básica

Miguel Galo Fernández

23 de octubre de 2016



Índice de Contenidos

1. Introducción **3**

2. Teorema de Thales **7**

3. Segundo Teorema de Thales **9**

4. Semejanza de triángulos **9**
4.1. Criterio de semejanza AAA 9
4.2. Criterio de semejanza LAL 10
4.3. Criterio de semejanza de LLL 11
4.4. Corolarios de la semejanza de triángulos 11

5. Angulos de rectas paralelas cortadas por una secante **13**
5.1. Ángulos internos 13
5.2. Ángulos externos 13
5.3. Ángulos correspondientes 14
5.4. Ángulos opuestos por el vértice 14

6. Ángulos en la circunferencia **15**
6.1. Ángulo central 15
6.2. Ángulo inscrito 16
6.3. Ángulo semi-inscrito 18
6.4. Ángulo exterior 19
6.5. Ángulo interior 20

7. Teorema de Pitágoras **21**

8. Teorema de Euler para poliedros **24**

EL DESTIERRO DE LA GEOMETRÍA EN LA ENSEÑANZA OBLIGATORIA

1. Introducción

El lenguaje algebraico que se utiliza en la enseñanza de la geometria va en detrimento de la comprensión de los conceptos geométricos y merma la capacidad de razonamiento en los alumnos. El álgebra posee un lenguaje muy potente que formaliza y estructura muy bien los contenidos pero ese lenguaje en sí es pobre de contenidos. El mayor dislate se produce cuando la enseñanza se encarga sólo de crear recetarios algorítmicos que se aplican a casos particulares para resolver algún ejercicio. Nos hemos olvidado de algo sumamente importante: la demostración geométrica es imprescindible para tener un conocimiento sólido. No es honesto dar el enunciado del teorema de Thales sin rigor, empobreciendo la creatividad de los alumnos el hecho de que no se les presente una demostración. El docente debe procurar no dogmatizar con algoritmos descerebrados, y evitar dentro de los posible que queden cabos sueltos.

¿Enseño matemáticas cuando transmito recetarios y formularios algorítmicos?, ¿se puede considerar esa forma de enseñar como transmisión de conocimiento? Mi respuesta es contundente, **NO**. En nuestro mundo eso no tiene sentido, disponemos de ordenadores y software lo suficientemente variado para obtener, valga de ejemplo, el valor de la hipotenusa en un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 12 y 9 cm. ¿Es más enriquecedor que el alumno, con lápiz y papel, aplique el Teorema de Pitágoras y calcule a mano la raíz cuadrada de 225? Es evidente que no, entre una cosa y otra lo único que varía es el medio, en un caso se utiliza un ordenador o calculadora y en el otro se utiliza un medio más arcaico.

Según Villiers (1993) podemos destacar las siguientes funciones de la demostración matemática:

- Verificación (concerniente a la verdad o falsedad de una proposición)
- Explicación (concerniente a la profundización y mejor comprensión de la esencia del problema de estudio)
- Simplificación (organización de resultados dentro de un sistema axiomático)
- Descubrimiento (concerniente al análisis de corolarios, conjeturas y vías de abordar otras nuevas proposiciones cercanas a la de estudio)
- Comunicación (transmisión del conocimiento matemático)

En el siguiente ejemplo se pueden observar las funciones de la demostración descritas

DEMOSTRACIÓN DE LA IRRACIONALIDAD DE $\sqrt{2}$

Definición 1 *(Segmentos conmensurables)Dos segmentos a y b se dicen conmensurables si existe un tercer segmento ξ tal que $a = n \cdot \xi$, $b = m \cdot \xi$ donde n y m han de ser enteros $(n, m \in \mathbb{Z})$. En caso contrario se dice que las longitudes a y b son inconmensurables.*

Veamos que 1 y $\sqrt{2}$ (el lado y la diagonal de un cuadrado de lado 1) son inconmensurables.

Si nos fijamos en la figura1 $L_1 = D - L$, siendo D_1 la diagonal del cuadrado de lado L_1. Podemos reiterar este proceso hasta el infinito.

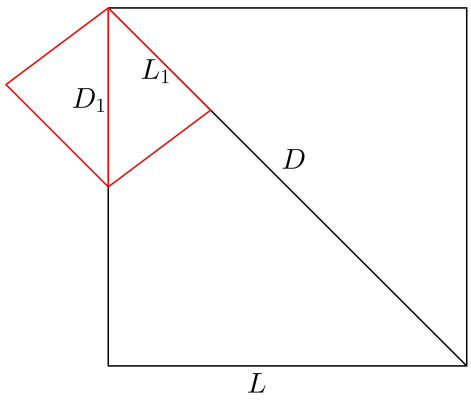


Figura 1: Segmentos inconmensurables

Proposición 1 *En las condiciones anteriores se verifica que* $D_1 = L - L_1$

Demostración

Si aplicamos el Teorema de Pitágoras en el cuadrado pequeño obtenemos $D_1 = L_1 \cdot \sqrt{2} = (D - L) \cdot \sqrt{2} = D \cdot \sqrt{2} - L \cdot \sqrt{2} = L \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} - D = 2 \cdot L - D$. *Hemos obtenido que* $D_1 = 2 \cdot L - D = L - (D - L) = L - L_1$ *(c.s.q.d.)*

Volvamos a nuestro tema, a la demostración de la irracionalidad de $\sqrt{2}$. *Por reducción al absurdo, supongamos que siendo* L *conmensurable también lo fuera* $\sqrt{2}$. *Como* $L_1 = D - L$, *resulta que* L_1 *también sería conmensurable (es obvio que la diferencia entre longitudes conmensurables es otra longitud conmensurable). Si reiteramos el proceso generaríamos una sucesión decreciente* $L_1 > L_2 > \cdots > L_n > \cdots$. *En este descenso infinito llegaría un momento en el que un valor* L_i *sería menos que* ξ, *aún siendo un múltiplo entero de* ξ *lo cual es una contradición. Luego* $\sqrt{2}$ *no puede ser conmensurable, es inconmensurable (irracional).*

Estamos utilizando las palabras inconmensurable e irracional con el mismo significado. Al principio hemos definido lo que significa mensurable/inconmensurable, irracional es aquel número que no es racional en el sentido de que no se puede expresar como cociente de dos enteros con denominador no nulo. ¿Dicen lo mismo las dos definiciones? ***SI****, es lo que vamos a demostrar a continuación.*

Proposición 2 *Sean* $a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{R}$. *Entonces* a *y* b *son conmensurables* $\Longleftrightarrow b = \dfrac{m}{n}$, *siendo* $m, n \in \mathbb{Z}$

Demostración

$\Rightarrow$ *) Supongamos que* a *y* b *son conmensurables y que la expresión de* a *como fracción es* $a = \dfrac{\alpha}{\beta}$. *Según la definición dada de conmensurables* $\exists\ \xi$ *tal que* $a = k \cdot \xi, b = l \cdot \xi$, *siendo* k *y* l *números enteros. Por tanto* $\dfrac{b}{a} = \dfrac{l}{k} \Longrightarrow b = \dfrac{l \cdot \alpha}{k \cdot \beta}$. *Si tomamos* $m = l \cdot \alpha$, *y* $n = k \cdot \alpha$ *tenemos demostrada la condición necesaria.*

$\Leftarrow$ *) Supongamos ahora que* $b = \dfrac{m}{n}$, *siendo* $m, n \in \mathbb{Z}$. *Como* $a = \dfrac{\alpha}{\beta}$, *tomemos* $M = m.c.m.(\beta, n)$. *Existirán enteros* $k, l \in \mathbb{Z}$ *tales que* $M = k \cdot \beta$ *y* $M = l \cdot n$. *Si llamamos*

$\xi = \dfrac{1}{M}$ *entonces* $a = k \cdot \alpha \dfrac{1}{k \cdot \beta} = z_1 \cdot \xi$, *siendo* $z_1 = k \cdot \alpha \in \mathbb{Z}$. *De la misma manera* $b = l \cdot \dfrac{1}{l \cdot n} = z_2 \cdot \xi$, *siendo* $z_2 = l \cdot n \in \mathbb{Z}$. *Las expresiones* $a = z_1 \cdot \xi$ *y* $b = z_2 \cdot \xi$ *nos aseguran que a y b son conmensurables.*

Hemos establecido una equivalencia entre conmensurable y racional, o lo que es lo mismo entre inconmensurable e irracional. Vamos a ver una demostración de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ *en la que no haremos referencia a mensurable/inconmensurable. Para ello vamos a necesitar la siguiente proposición*

Proposición 3 *Sea* $z \in \mathbb{Z}$ *un número entero. Entonces* z^2 *es par* $\Longleftrightarrow$ z *es par*

Demostración

$\Rightarrow$ *) Supongamos que* z^2 *es par y que z fuese impar. Entonces se podrían expresar* z^2 *y z, respectivamente, como* $z^2 = 2l$, $z = 2k+1 \Rightarrow z^2 = 4k^2 + 4k + 1 \Rightarrow 2(2l^2 - 2k^2 - 2k) = 1$ *lo que es una contradición ya que 1 no es número par. Luego ha de ser z par.*

$\Leftarrow$ *) Si z es par* $z = 2k \Rightarrow z^2 = 4k^2 = 2(2k^2) \Rightarrow z^2$ *es par*

Proposición 4 $\sqrt{2}$ *es irracional*

Demostración

Por reducción al absurdo, supongamos que $\sqrt{2}$ *fuese un número racional. Entonces podría expresarse como cociente de dos números enteros, es decir* $\sqrt{2} = \dfrac{m}{n}$ *(fracción que suponemos irreducible, si no lo fuera en todo lo que sigue emplearíamos la forma canónica de la fracción)* $2 = \dfrac{m^2}{n^2} \Rightarrow m^2 = 2n^2 \Rightarrow m^2$*es par* $\Rightarrow$ *m es par* $\Rightarrow m = 2l \Rightarrow m^2 = 4l^2 = 2n^2 \Rightarrow n^2 = 2l^2 \Rightarrow n^2$ *es par* $\Rightarrow$ *n es par. Si m y n son pares se produce una contradición con que la fracción* $\dfrac{m}{n}$ *sea irreducible. Por tanto* $\sqrt{2}$ *no puede ser un número racional, es irracional.*

Si comparamos las dos demostraciones anteriores, es mucho más rica en conceptos la efectuada en primer lugar. La segunda es más algebraica, está perfectamente estructurada pero no llega a mostrar la gran variedad de ideas geométricas expresadas en la primera. Estas demostraciones nos muestran que $\sqrt{2}$ *no puede estar representada por un número decimal con finitas cifras decimales, como tampoco lo puede estar por un número decimal con infinitas cifras decimales periódicas, ya que en ambos casos se podría expresar el número decimal como una fracción. Luego* $\sqrt{2}$ *es un número decimal con infinitas cifras decimales no periódicas. Es imposible expresar* $\sqrt{2}$ *como número decial exactamente, podemos tener aproximaciones de la raíz con un número decimal como 1'41, 1'4142, 1'414213, etc. Hay que insistir continuamente en la imposibilidad de expresar* $\sqrt{2}$ *como un número decimal. Observo que los alumnos tienen in mente que la calculadora da el valor exacto de* $\sqrt{2}$*, para evitar esta situación sirven las demostraciones, cualquiera que haya entendido la demostración ve en la calculadora una buena aproximación de un número irracional.*

Podríamos generalizar este resultado diciendo que si $p \in \mathbb{Z}$ *es primo entonces* $\sqrt{p}$ *es irracional. Para demostrarlo necesitaremos el Teorema de Bezout y el Lema de Euclides.*

Teorema 5 *(Teorema de Bezout) Sean $a, b \in \mathbb{N}$ dos números naturales tales que $d = m.c.d.(a, b)$, entonces $\exists\ x, y \in \mathbb{Z}$ tal que $ax + by = d$.*

Demostración

Consideremos el conjunto $S = \{ax + by \geq 0 \text{ tal que } x, y \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{N}$. Como este subconjunto de los números naturales está acotado inferiormente por cero, posee una máxima cota inferior. Sea $m = min\{S\}$ esta máxima cota inferior de S. Se tiene que $S \neq \emptyset$ ya que $a = a1 + bo \in S$. Además $\exists\ x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ tales que $m = ax_0 + by_0$. Veamos ahora que $m|a$ y que $m|b \Rightarrow m|d$, ya que d es el mayor de los divisores comunes de a y b. Al dividir a entre m se obtiene un cociente c y un resto r ($r \leq m$). Si r=0 entonces verifica que $m|a$. Si r no es cero cumple $a = mc + r \Rightarrow r = a - mc = a - (ax_0 + by_0)c \Rightarrow r = a(1 - x_0c) - by_oc \in S \Rightarrow$ ¡Contradición! ya que $r \leq m$ y m es el mínimo de S. Luego $m|a$, de igual forma se prueba que $m|b$. Como $m|d \Rightarrow \exists\ k \in \mathbb{Z}$ tal que $d = mk = a(x_0k) + b(y_0K) \Rightarrow d = ax + by$ (csqd)

Lema 6 *(Lema de Euclides) Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tres enteros tal que $a|bc$ y $m.c.d.\{a, b\} = 1$. En tonces $a|c$*

Demostración

Por el Teorema de Bezout $\exists\ x, y \in \mathbb{Z}$ tal que $1 = ax + by \Rightarrow c = acx + bcy$. Evidentemente $a|ac \Rightarrow a|acx$. Por hipótesis $a|bc \Rightarrow a|bcy \Rightarrow a|acx + bcy = c$ (csqd)

Teorema 7 *. Sea $p \in \mathbb{Z}$ un número primo. Entonces $\sqrt{p}$ es irracional.*

Demostración

Supongamos que $\sqrt{p}$ fuera un número racional. Entonces $\exists\ m, n \in \mathbb{Z},\ m \neq 0$ tal que $\sqrt{p} = \frac{m}{n}$ (irreducible) $\Rightarrow p = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow pn^2 = m^2 \Rightarrow p|m^2 \Rightarrow p|m$ y esto se obtiene aplicando el Lema de Euclides. Por tanto $\exists\ k \in \mathbb{Z}$ tal que $m = kp \Rightarrow m^2 = k^2p^2 = pn^2 \Rightarrow k^2p = n^2 \Rightarrow p|n^2 \Rightarrow p|n$, lo que es una contradición con que $\frac{m}{n}$ sea irreducible

2. Teorema de Thales

Sea la configuración geométrica determinada por la figura:

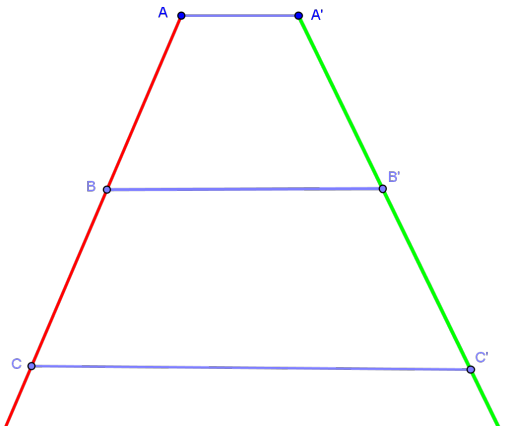


Figura 2: Teorema de Thales

Entonces son equivalentes las siguientes proposiciones:

a) Las rectas que pasan por AA', BB' y CC' son paralelas

b) los segmentos de extremos AB, BC y AA' son proporcionales a los segmentos A'B', B'C' y CC', es decir $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} = \frac{AA'}{BB'}$

Demostración

a) $\Rightarrow$ *b). Supongamos que las rectas AA', BB' y CC' son paralelas. Hemos de probar que los segmentos AB, BC y AA' son proporcionales a los segmentos A'B', B'C' y CC'. Los triángulos* $\widehat{AA'B}$ *y* $\widehat{AA'B'}$ *tienen la misma superficie ya que poseen una misma base* AA' *y una misma altura h tal y como indica la figura siguiente*

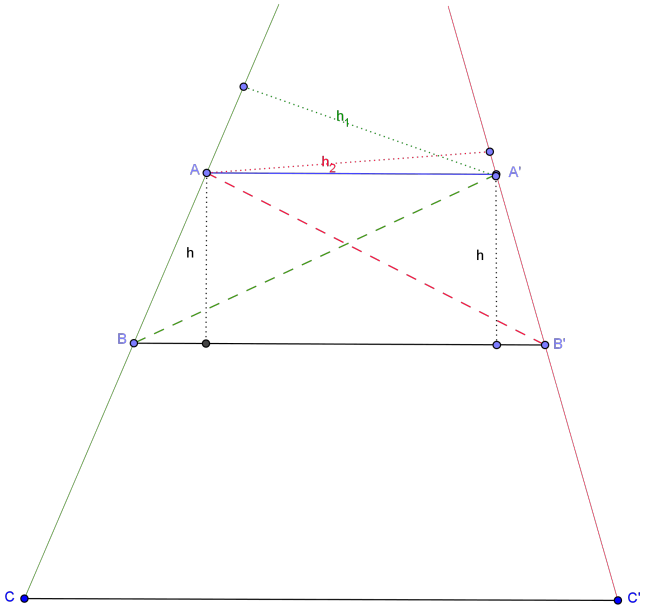


Figura 3: Triángulos $\widehat{AA'B}$ y $\widehat{AA'B'}$

En el triángulo $\widehat{AA'C}$ *tomamos como base el lado* AC *y por tanto la altura es* h_1*, siendo la superficie de este triángulo* $\boxed{\frac{AC \cdot h_1}{2}}$*. Si consideramos el triángulo* $\widehat{AA'C'}$ *y tomamos como base el lado A'C' al altura que le corresponde es* h_2 *y por tanto su área es* $\boxed{\frac{A'C' \cdot h_2}{2}}$*. De estas dos últimas expresiones recuadradas obtenemos que* $AC \cdot h_1 = A'C' \cdot h_2$

Recapitulando, hemos obtenido las expresiones:

$\left.\begin{array}{l} AB \cdot h_1 = A'B' \cdot h_2 \\ AC \cdot h_1 = A'C' \cdot h_2 \end{array}\right\}$ *Eliminando* h_1 *y* h_2 *obtenemos:*

$\frac{AB \cdot \cancel{h_1}}{AC \cdot \cancel{h_1}} = \frac{A'B' \cdot \cancel{h_2}}{A'C' \cdot \cancel{h_2}} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'}$*. Como* $AC = AB + BC$ *y* $A'C' = A'B' + B'C'$*, obtenemos que* $\frac{AB + BC}{AB} = \frac{A'B' + B'C'}{A'B'} \Rightarrow \cancel{1} + \frac{BC}{AB} = \cancel{1} + \frac{B'C'}{A'B'}$ *Luego se cumple que* $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$

Tan solo nos queda por probar que $\frac{AB}{BC} = \frac{AA'}{BB'}$*. Si aplicamos el resultado que hemos obtenido situándonos en el vértice C obtenemos* $\frac{AB}{BC} = \frac{AA'}{BB'}$

b) $\Rightarrow$ *a) Supongamos que los segmentos en cada una de las rectas son proporcionales. Debemos probar que las rectas AA', BB' y CC' son paralelas(figura 4)*

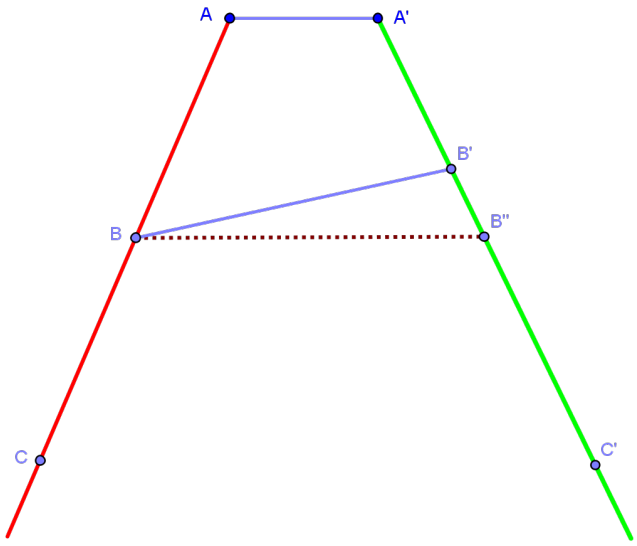


Figura 4: recíproco del Teorema de Thales

Sea B" el punto de corte de la recta paralela a la que pasa por los puntoa A y A' con la recta que pasa por los puntos A' y B'. Por hipótesis se verifica que $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$*. Pero si aplicamos el apartado a)* $\Rightarrow$ *b) a las paralelas AA' y BB' tenemos que* $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B''}{B''C'}$ *con lo que* $\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{A'B''}{B''C'} \Rightarrow B' = B''$ *y por tanto las rectas AA' y BB' son paralelas.*

3. Segundo Teorema de Thales

Sea $\widehat{ABC}$ un triángulo inscrito en una circunferencia de modo que el lado AB coincide con el diámetro. Entonces el ángulo correspondiente al vértice C es recto.

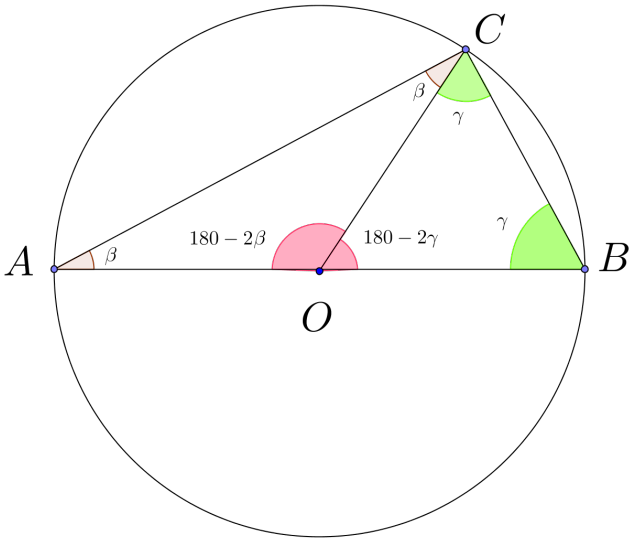


Figura 5: recíproco del Teorema de Thales

Demostración:

Los triángulos $\widehat{OCB}$ y $\widehat{OAC}$ son isósceles. Si nos fijamos en la figura anterior observamos que $180 - 2\alpha = 180 - (180 - 2\beta) \Rightarrow 2\alpha + 2\beta = 180 \Rightarrow \alpha + \beta = 90$

4. Semejanza de triángulos

En general, dos polígonos son sejantes si tienen sus ángulos iguales y sus lados proporcionales. En el caso de triángulos las exigencias para la semejanza son bastante más reducidas. Si los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A'B'C'}$ son sejantes entonces $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'}$ *y además* $\alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_2 = \beta_2,\ \alpha_3 = \beta_3$

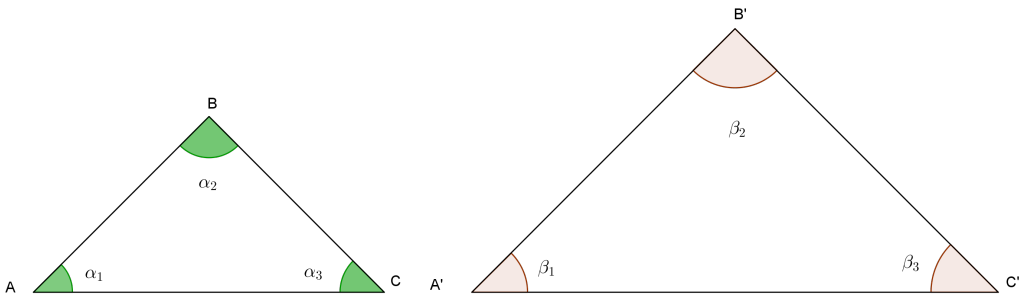


Figura 6: Tiángulos semejantes

4.1. Criterio de semejanza AAA

Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos iguales.

Demostración:

Si los triángulos semejantes los denotamos por $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A'B'C'}$, al estar determinados los ángulos del triángulo conocidos dos de ellos, afirmamos que los ángulos de ambos triángulos son iguales. Llevamos el vértice B sobre el B' y obtenemos una configuración geométrica como indica la siguiente figura:

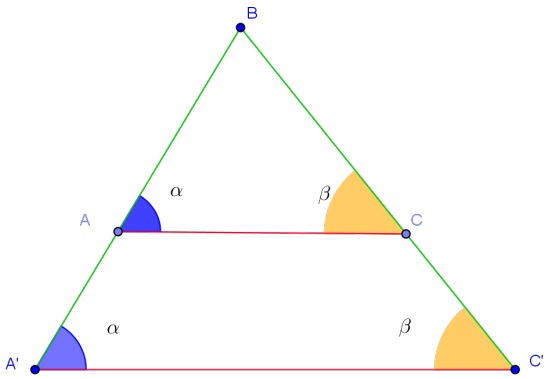


Figura 7: Tiángulos semejantes (en posición de Thales)

al ser las rectas AC y A'C' paralelas si aplicamos el teorema de Thales obtenemos que $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$ *(recordemos que hemos hecho coincidir B con B' por lo que B=B'), es decir que los lados de los triángulos son proporcionales y por tanto son semejantes.*

4.2. Criterio de semejanza LAL

Si dos triángulos tienen dos lados proporcionales e igual el ángulo comprendido entre ellos, entonces son semejantes

Demostración:

Supongamos que los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A'B'C'}$ verifican $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$*, siendo además el ángulo entre AB y AC el mismo que el ángulo que forman A'B' y A'C' tal y como indica la figura 8*

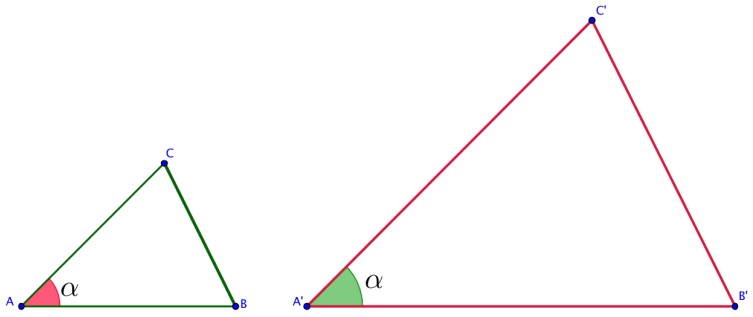


Figura 8: Semejanza LAL

Si llevamos el vértice A sobre el A' tenemos los triángulos en posición de Thales (figura 9)

Si aplicamos el inverso del Teorema de Thales, las rectas BC y B'C' son paralelas con lo que los ángulos de los dos triángulos son iguales. Aplicando el criterio de semejanza AAA obtenemos que los lados son proporcionales, es decir que los tríangulos son semejantes

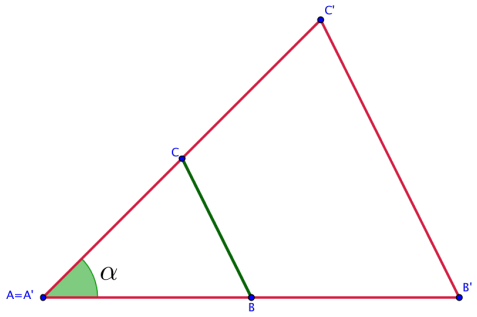


Figura 9: Semejanza LAL:triángulos en posición de Thales

4.3. Criterio de semejanza de LLL

Dos triángulos son semejantes si tienen sus lados proporcionales

Demostración:

Supongamos que los triángulos $\widehat{ABC}$ *y* $\widehat{A'B'C'}$ *tienen sus lados proporcionales tal y como indica la figura.*

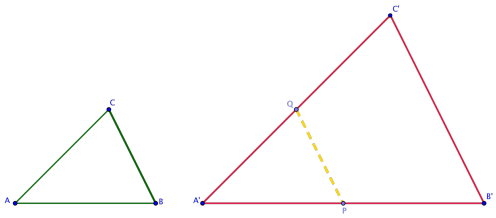


Figura 10: Semejanza LLL

Al ser proporcionales los lados de estos triángulos tenemos que $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$. *Sean P y Q los puntos sobre* $A'B'$ *y* $A'C'$, *respectivamente, tales que la recta que pasa por PQ es paralela a la que pasa por* B' *y* C'. *El ángulo que forman los lados* $A'Q$ *y* $A'P$ *es el mismo que el que forman los lados AB y AQ. Por el criterio de semejanza LAL, los triangulos ABC y A'QP son semejantes. Por otra parte los triángulos A'QP y A'B'C' están en posición de Thales (figura 10) y por tanto también son semejantes. Por transitividad, los triángulos ABC y* $A'B'C'$ *son semejantes.*

4.4. Corolarios de la semejanza de triángulos

1. *Dos triángulos rectángulos con un ángulo agudo de igual magnitud son semejantes*

2. *Dos triángulos isósceles con un mismo ángulo son semejantes*

3. *Todos los triángulos equiláteros son semejantes*

   Definición: *La media proporcional entre dos segmentos a y b es un tercer segmento x que verifica la relación* $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$

4. ***Teorema del cateto*** *En un triángulo rectángulo un cateto es la media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella, si nos fijamos en la figura el teorema del cateto se traduce en la expresión* $\frac{a}{b} = \frac{b}{m}$ *o bien* $\frac{a}{c} = \frac{c}{n}$

   Demostración:

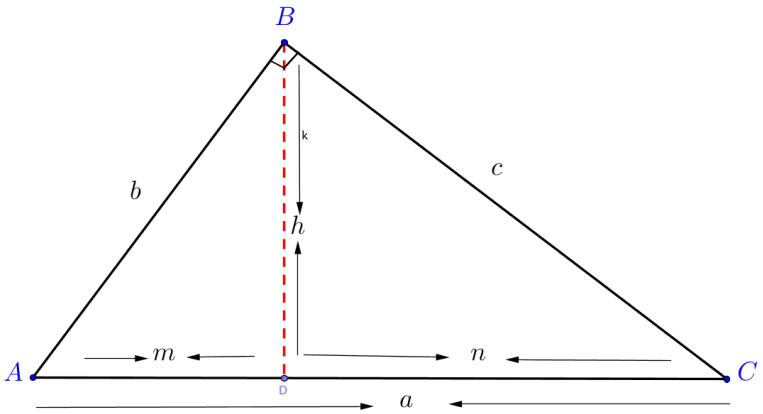


Figura 11: Teorema del cateto

Los triángulos rectángulos ABC y ABD son semejantes ya que tienen un ángulo agudo en común, el que tiene por vértice el punto A. Entonces sus lados son proporcionales, es decir $\frac{a}{b} = \frac{b}{m}$

Los triángulos rectángulos ABC y BCD también son semejantes ya que tienen un ángulo agudo en común, el del vértice C, por tanto sus lados verifican $\frac{a}{c} = \frac{c}{n}$ *al ser proporcionales.*

5. ***Teorema de la altura*** *En un triángulo rectángulo la altura sobre la hipotenusa es media proporcional entre las proyecciones de los catetos sobre ella , en la figura 11 esto se expresaría mediante la expresión* $\frac{m}{h} = \frac{h}{n}$

   Demostración:

   Por transitividad, como los triángulos ABD y BCD son semejantes al triángulo ABC, entonces son semejantes entre sí. Por lo tanto se verifica $\frac{m}{h} = \frac{h}{n}$

5. Angulos de rectas paralelas cortadas por una secante

5.1. Ángulos internos

Son los que se encuentran entre las rectas paralelas. En la figura son internos los ángulos $\alpha,\ \beta,\ \gamma\ y\ \delta$

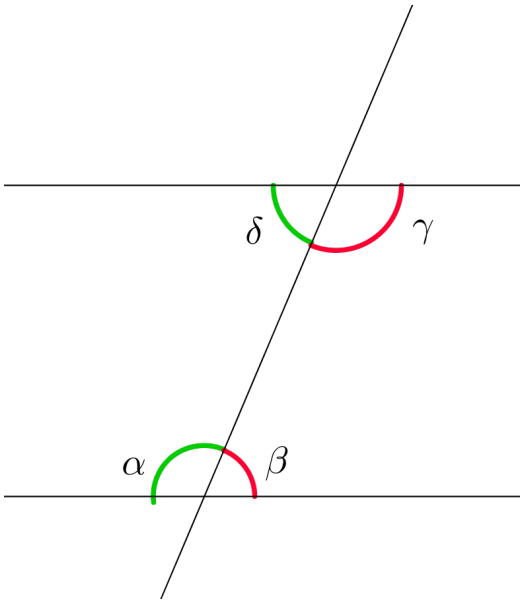


Figura 12: Ángulos internos

Los ángulos internos se llaman alternos si están a distinto lado de la secante, es decir uno está a la derecha y otro está a la izquierda de la secante. Son ángulos internos alternos $\alpha\ y\ \gamma$ *y* $\beta\ y\ \delta$

5.2. Ángulos externos

Son los que se encuentran fuera de la región comprendida entre las paralelas. En la figura son ángulos externos A, B, C y D.

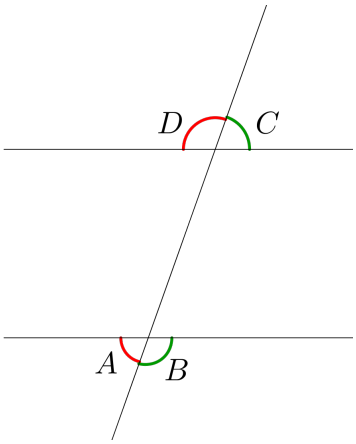


Figura 13: Ángulos externos

Los ángulos externos se llaman alternos si están a distinto lado de la secante, es decir uno está a la derecha y otro está a la izquierda de la secante. Son ángulos externos alternos A y C y B y D

5.3. Ángulos correspondientes

Son aquellos que están al mismo lado de las paralelas y al mismo lado de la transversal. Son ejemplos de ángulos correspondientes los α y δ y los β y γ de la figura siguiente

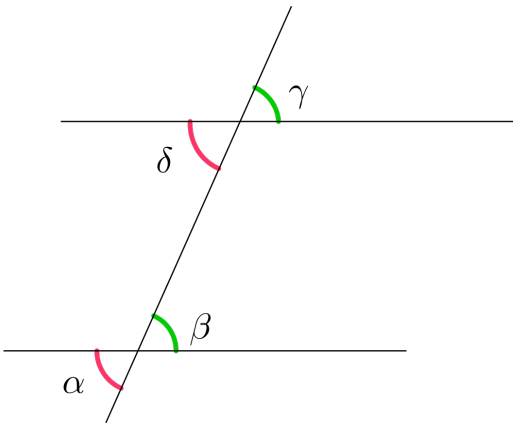


Figura 14: Ángulos correspondientes

5.4. Ángulos opuestos por el vértice

Son los ángulos que teniendo el mismo vértice, los lados de uno son semirrectas opuestas de los lados del otro. En la figura α y β son opuestos por el vértice.

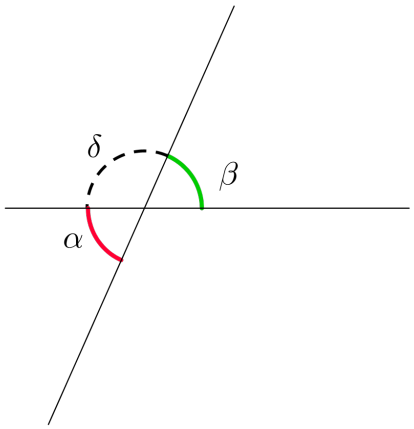


Figura 15: Ángulos opuestos por el vértice

Proposición 8 *Los ángulos opuestos por el vértice son iguales*

Demostración

Si nos fijamos en la figura 15, el ángulo δ es suplementario de α β. Por tanto $\alpha + \not{\delta} = \beta + \not{\delta} = 180^o \Rightarrow \alpha = \beta$

Proposición 9 *Los ángulos correspondientes son iguales*

Demostración

Observando la figura 14, al trasladar la paralela que sirve de lado común a los ángulos α y β sobre la paralela que hace de lado común de los ángulos γ y δ, es obvio que $\alpha = \delta$

Proposición 10 *Los ángulos alternos internos son iguales*

Demostración

Si en la figura 12 trasladamos el vértice común de los ángulos α y β hasta hacerlo coincidir con el vértice común de γ y δ, en la configuración que se nos mostraría los ángulos α y γ serían opuestos por el vértice y por tanto iguales

Proposición 11 *Los ángulos alternos externos son iguales.*

La demostración de esta propiedad es similar a la anterior.

Teorema 12 *La suma de los tres ángulos de un triángulo es 180^o*

Demostración

Si el triángulo tiene ángulos α, β y γ tal y como se indica en la figura, trazamos una paralela a la recta AB que pasa por C.

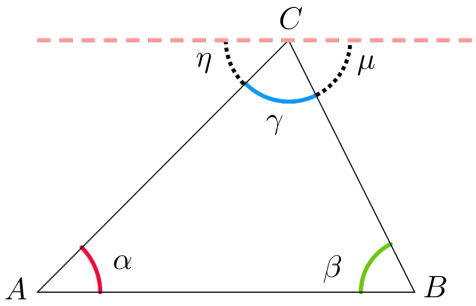


Figura 16: Suma de ángulos de un triángulo

Según hemos visto, al ser α y η angulos internos alternos , lo mismo que también lo son β y μ, se tiene que $\alpha = \eta$ y $\beta = \mu$. Como $\eta + \gamma + \mu = 180^o \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 180^o$

6. Ángulos en la circunferencia

6.1. Ángulo central

Es aquel cuyo vértice coincide con el centro de la circunferencia

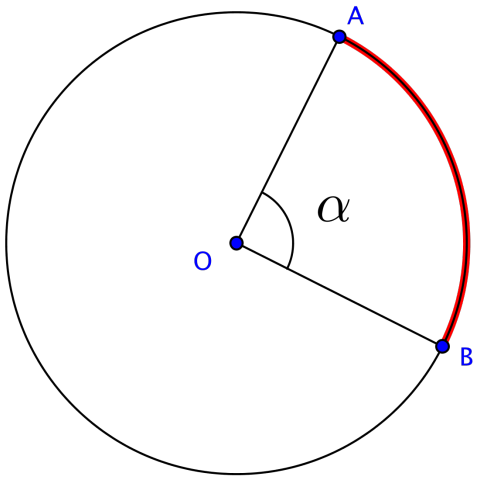


Figura 17: Ángulo central

Proposición 13 *En las condiciones de la definición anterior el ángulo central coincide con la amplitud de su arco, es decir $\alpha = \overset{\frown}{AB}$*

6.2. Ángulo inscrito

El vértice del ángulo está sobre la circunferencia y sus lados son dos cuerdas tal y como indica la siguiente figura

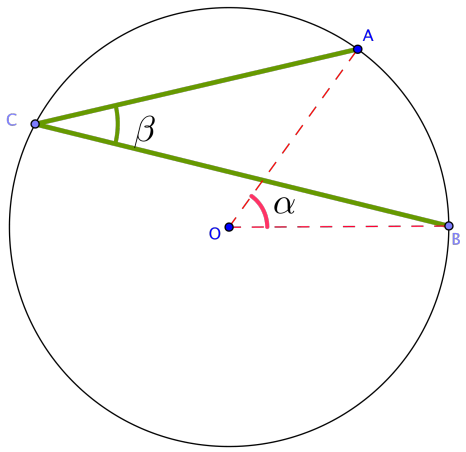


Figura 18: Ángulo inscrito

Proposición 14 *La amplitud del ángulo inscrito es la mitad del ángulo central, es decir en las condiciones de la figura 18 se verifica* $\beta = \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}}{2}$

Demostración

Se pueden dar tres configuraciones en la posición del ángulo inscrito:

- *Que la región comprendida entre las cuerdas CA y CB no contenga al centro de la circunferencia*

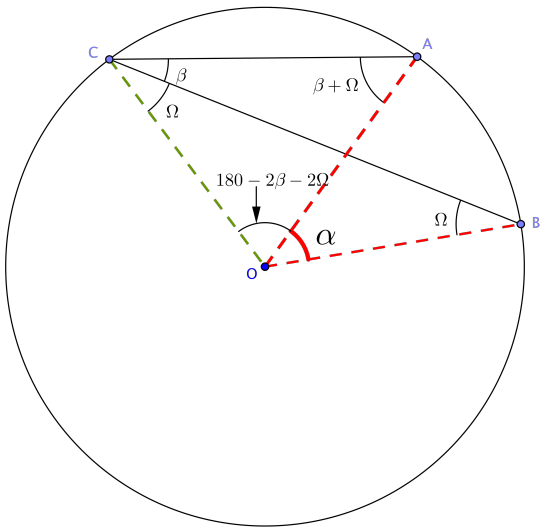


Figura 19: Ángulo inscrito posición 1

El valor de los ángulos añadidos en la figura 18 y que se representan en la figura 19 se ha hecho teniendo en cuenta que los triángulos COA y COB son isósceles. Si nos fijamos en este último triángulo, se debe cumplir que $\cancel{180} - 2\beta - \cancel{2\Omega} + \alpha + \cancel{2\Omega} = \cancel{180} \Rightarrow \beta = \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}}{2}$

- *Que los puntos C y B sean diametralmente opuestos (lo mismo daría decir que sean diametralmente opuestos los puntos C y A)*

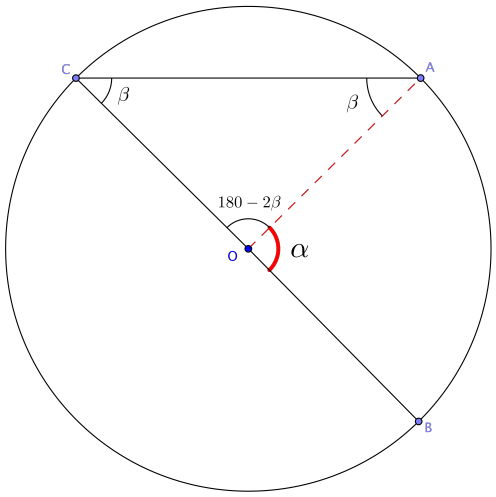


Figura 20: Ángulo inscrito posición 2

Como $\cancel{180} - 2\beta + \alpha = \cancel{180} \Rightarrow \beta = \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2}$

- *Que el centro esté en la región comprendida entre las dos cuerdas que forman los lados del triángulo*

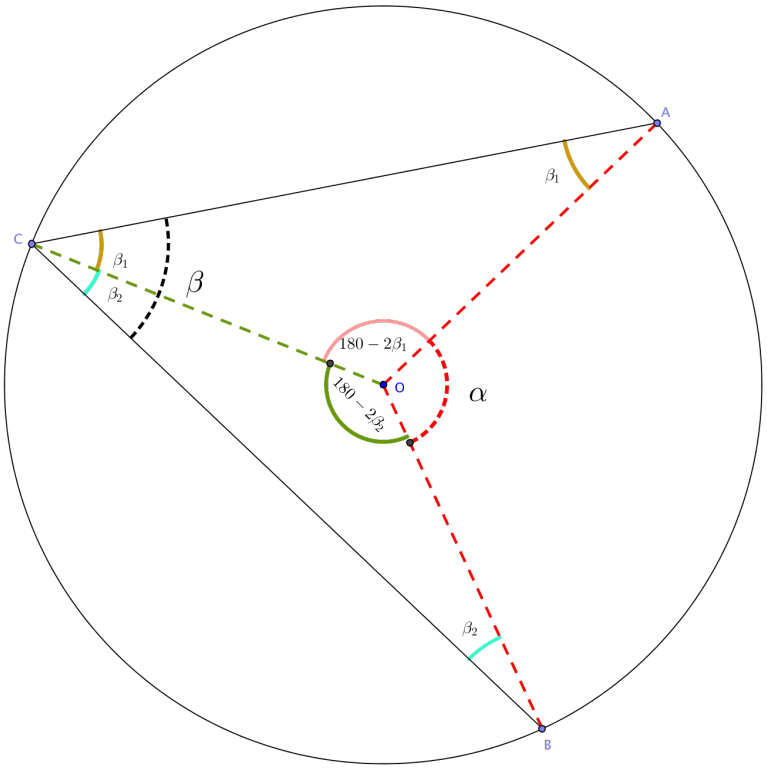


Figura 21: Ángulo inscrito posición 3

Si nos fijamos en la figura anterior, se verifica que $\beta = \beta_1 + \beta_2$ *y además* $\cancel{180} - 2\beta_1 + \cancel{180} - 2\beta_2 + \alpha = \cancel{360} \Rightarrow \alpha = 2(\beta_1 + \beta_2) \Rightarrow \alpha = 2\beta \Rightarrow \beta = \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2}$

6.3. Ángulo semi-inscrito

Es aquel que tiene el vértice sobre la circunferencia, uno de sus lados es una cuerda y el otro coincide con la tangente a la circunferencia en el vértice.

Proposición 15 *la recta que pasa por el centro de la circunferencia y por el punto de tangencia es perpendicular a la recta tangente.*

Demostración

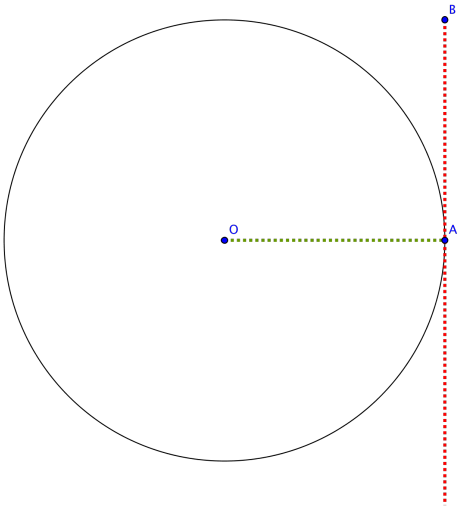


Figura 22: Posición radio/tangente

Por reducción al absurdo. Supongamos que OA no fuera perpendicular a AB. Entonces OA sería .ºblicua" respecto a AB, existiría un punto C en la recta AB de modo que OA=OC, por tanto C sería un punto de la circunferencia y la recta AC, que es la misma que AB no sería tangente sino secante, lo cual es absurdo. Luego ha de ser OA perpendicular a AB

Proposición 16 *La amplitud del ángulo semi-inscrito es la mitad de la amplitud del arco central*

Demostración

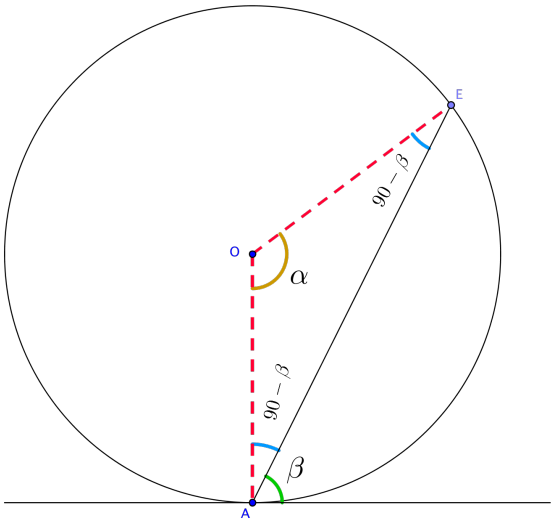


Figura 23: Ángulo semi-inscrito

Según podemos observar en la figura 23, el ángulo semi-inscrito tiene amplitud β. Como el segmento OA es perpendicular a la tangente segun hemos probado en la proposición anterior, el ángulo formado por el radio y la recta AE tiene amplitud $90-\beta$. Por ser el triángulo OAE isósceles, el ángulo formado por la recta AE y el radio OE es también $90-\beta$. Observando el triángulo OAE se tiene que $\alpha+90-\beta+90-\beta=180 \Rightarrow \beta=\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\overset{\frown}{\mathrm{AE}}}{2}$

6.4. Ángulo exterior

Es aquel cuyo vértice es un punto exterior a la circunferencia, siendo sus lados o cuerdas de la circunferencia o tangentes a ella

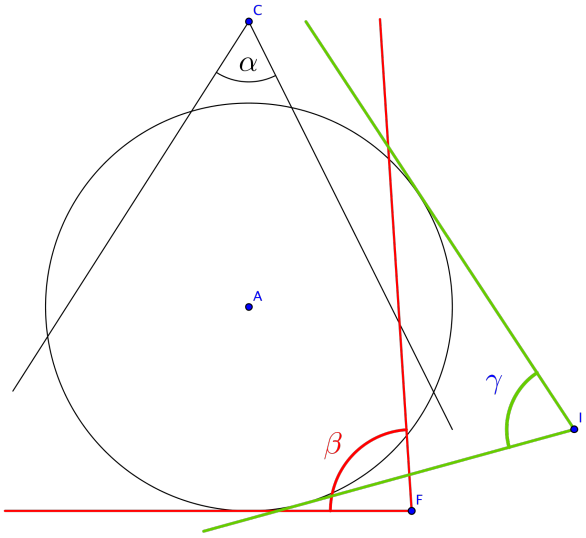


Figura 24: Los ángulos α, β y γ son exteriores

Proposición 17 *La medida del ángulo exterior es igual a la semidiferencia de la amplitud de los arcos que describen sus lados, es decir* $\gamma=\dfrac{\alpha-\beta}{2}=\dfrac{\overset{\frown}{\mathrm{CD}}-\overset{\frown}{\mathrm{AB}}}{2}$

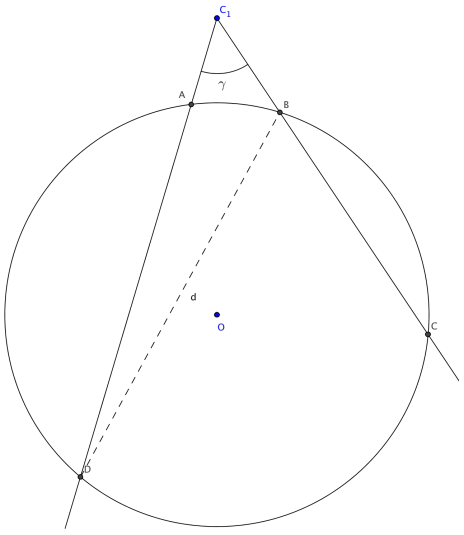


Figura 25: Ángulo exterior

Demostración

Trazamos el segmento que une D con B y obtenemos la siguiente figura:

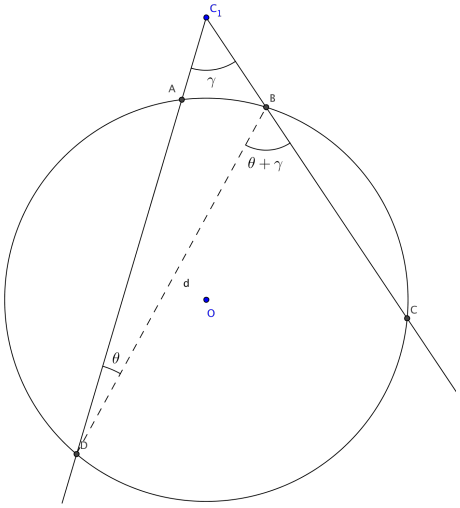


Figura 26: Ángulo exterior 1

Como los ángulos θ *y* $\theta+\gamma$ *son inscritos* $\theta = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2}$, $\theta+\gamma = \dfrac{\overset{\frown}{CD}}{2}$ *con lo cual se tiene que* $\gamma = \dfrac{\overset{\frown}{CD}}{2} - \theta = \dfrac{\overset{\frown}{CD}}{2} - \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2} = \dfrac{\overset{\frown}{CD} - \overset{\frown}{AB}}{2}$

6.5. Ángulo interior

Es aquel cuyo vértice es un punto interior de la circunferencia

Proposición 18 *La amplitud del angulo interior es la semisuma de los arcos delimitados por sus lados y por sus prolongaciones, es decir que* $\alpha = \dfrac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2}$

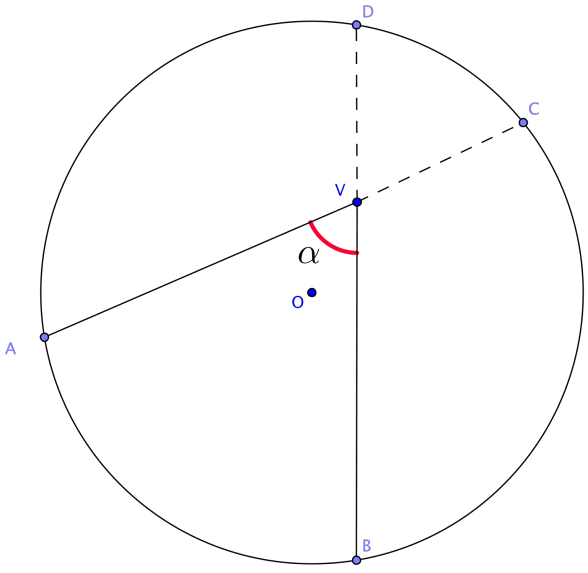


Figura 27: Ángulo interior

Demostración

Si unimos A con D obtenemos los siguientes ángulos

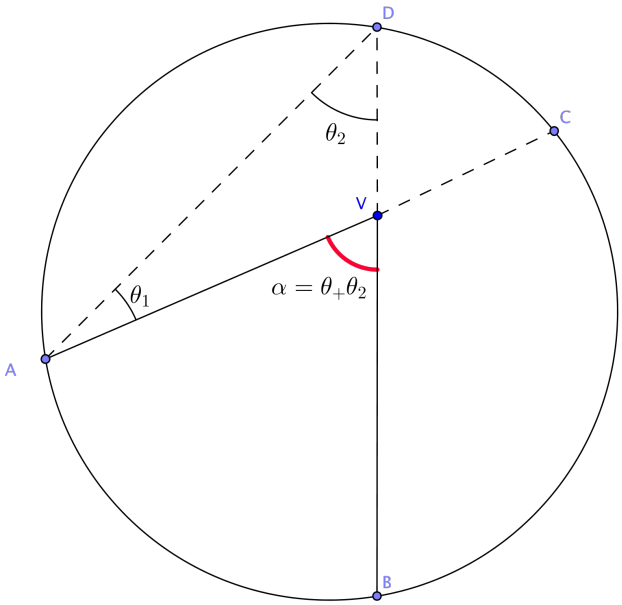


Figura 28: Ángulo interior 1

El ángulo interior es $\alpha = \theta_1 + \theta_2$. *Al ser los ángulos* θ_1 *y* θ_2 *inscritos se tiene que* $\theta_1 = \dfrac{\overset{\frown}{\mathrm{CD}}}{2}$ *y que* $\theta_2 = \dfrac{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}}{2}$, *luego* $\alpha = \dfrac{\overset{\frown}{\mathrm{AB}} + \overset{\frown}{\mathrm{CD}}}{2}$

7. Teorema de Pitágoras

Aquí encontramos una de las cuestiones que evidencian lo mal que se enseñan, salvo honrosas excepciones, las matemáticas en España. El Teorema de Pitágoras es un componente más de la memorística, del recetario algorítmico que se enseña en las escuela. El sistema se interesa más por el cuanto (cálculo) que por el cómo y porqué (pensamiento geométrico). Si se enseña mal se aprende peor, de esta manera aparece como ridícula la cultura del esfuerzo tan en boga hoy día pues, por mucho que uno se esfuerce si no entiende no aprende. Si privamos a los alumnos de tener la oportunidad de participar en esta actividad —de proponer problemas, hacer sus propias conjeturas y descubrimientos, de estar equivocados, de estar creativamente frustrados, de tener una inspiración, y de improvisar sus propias explicaciones y demostraciones— les estamos privando de las matemáticas en sí mismas. Hay que protestar por la falta de matemáticas en las clases de matemáticas. Otra tara en lo que pueden aprender los alumnos, que dista mucho de coincidir con la información que se les pretende hacer llegar con mayor o menor fortuna, son los conocimientos deficientes de los que deben enseñar. Estos reproducen los mismos cánones de enseñanza que se les aplicó a ellos, es decir, la enseñanza es un refrito de fórmulas o en el mejor de los casos de algoritmos que se aplican a un montón de ejercicios que se proponen como tarea para casa. En eso consiste la actividad matemática en la mayoría de las aulas. El caso del Teorema de Pitágoras es más lacerante, la fórmula se transmite con parcialidad y con una pobreza sorprendente. "En un triángulo rectángulo la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos", y se acabó, ya está. He mencionado la parcialidad porque el recíproco del Teorema de Pitágoras también es cierto y nunca se menciona por lo general. "Si en un triángulo el lado mayor al cuadrado coincide con la suma de los cuadrados de los otros

dos lados, entonces el triángulo es rectángulo. Huelga decir que, incluso en los libros de texto, las demostraciónes brillan por su ausencia. ¿Es que esas demostraciones son muy complicadas y tediosas? Pues no, a continuación propongo demostraciones para constatar que no són difíciles. Obviamente el lector podrá buscar otras demostraciones más elaboradas y tal vez más fáciles.

Teorema 19 *Teorema de Pitágoras*

Sea el triángulo de lados a, b y c, siendo a el lado mayor. Son equivalentes las siguientes proposiciones:

a) El triángulo es rectángulo siendo "a" la hipotenusa

b) $b^2 + c^2 = a^2$

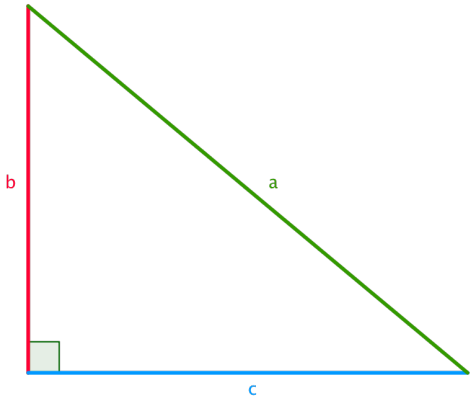


Figura 29: Teorema de Pitágoras

Demostración

a) $\Rightarrow$ *b) Suponemos que el triángulo es rectángulo siendo "a" la hipotenusa*

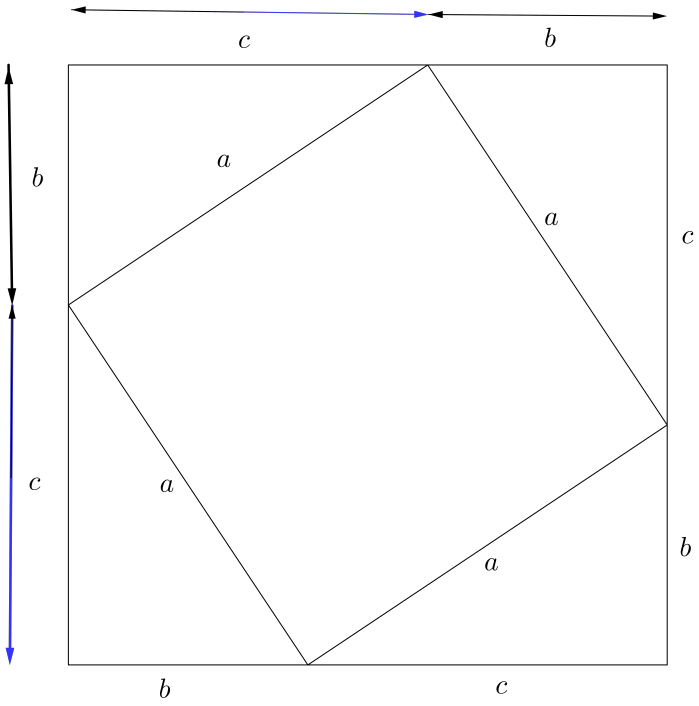


Figura 30: Demostración Teorema de Pitágoras

Hemos construido un cuadrado de lado b+c dentro del cual hay otro cuadrado de lado a (el lector debe saber ya el porqué los ángulos de este cuadrilátero de lado a son rectos). El área del cuadrado grande será igual a la del pequeño más la superficie de los cuatro triángulos rectángulos, es decir $(b+c)^2 = a^2 + 4\dfrac{bc}{2} \Rightarrow b^2 + c^2 + \cancel{2bc} = a^2 + \cancel{2bc}$

b) $\Rightarrow$ *a) Procedemos por reducción al absurdo, supongamos que se verifica* $b^2 + c^2 = a^2$ *y que el triángulo no es rectángulo. Se pueden dar dos casos:*

- *Que el ángulo que forman los lados "b" y "c" sea agudo. Trazamos la altura correspondiente al lado c y consideramos la siguiente figura:*

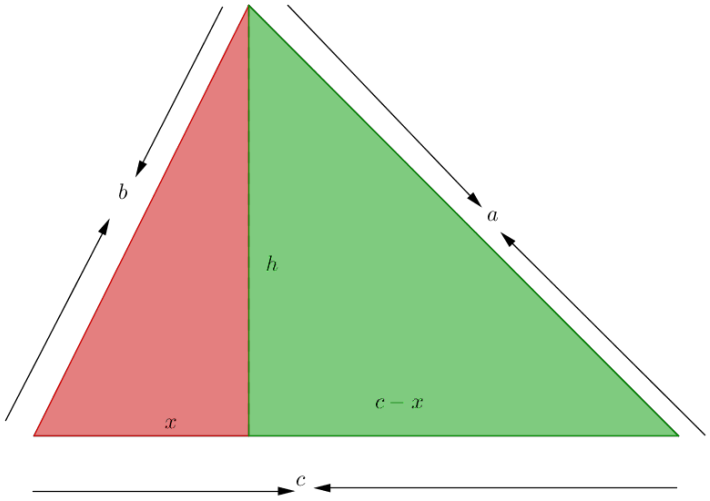


Figura 31: Demostración reciproco del Teorema de Pitágoras

Del triángulo rectángulo en rojo se obtiene que $b^2 = x^2 + h^2$*, y del triángulo rectángulo en verde se obtiene la relación* $a^2 = (c-x)^2 + h^2$*. Como estamos suponiendo que se verifica* $b^2 + c^2 = a^2$ *tenemos que* $x^2 + \cancel{h^2} + c^2 = (c-x)^2 + \cancel{h^2} \Rightarrow \cancel{x^2} + \cancel{c^2} = \cancel{c^2} + \cancel{x^2} - 2cx \Rightarrow x = 0$*, ¡contradición!, el ángulo entre los lados b y c no puede ser agudo pues si* $x = 0$ *este ángulo es de 90º*

- *Que el ángulo que forman los lados "b" y "c" sea obtuso. Procedemos de la misma forma que anteriormente teniendo en cuenta la figura:*

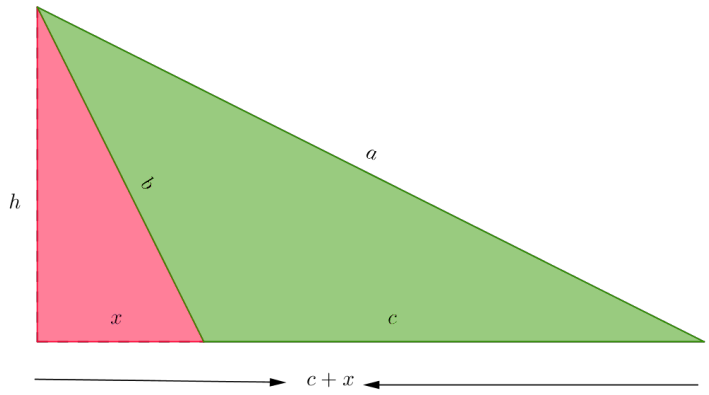


Figura 32: Demostración reciproco del Teorema de Pitágoras

Llegamos también a una contradición, al no poder ser el ángulo entre los lados b y c ni agudo ni obtuso ha de ser recto con lo cual se termina la demostración.

8. Teorema de Euler para poliedros

Un poliedro se dice convexo si al unir dos cualesquiera de sus puntos el segmento que determinan está contenido en el poliedro. Por ejemplo, un cubo es un poliedro convexo.

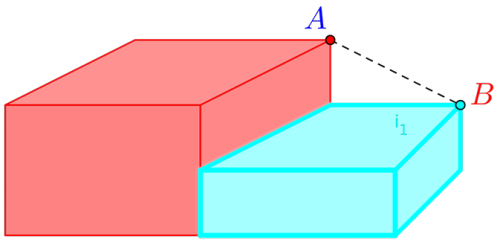


Figura 33: Poliedro no convexo, el segmento $\overline{AB}$ no está incluido en el poliedro

Teorema 20 *En todo poliedro convexo, denotemos por C al número de caras, V al número de vértices y A al número de aristas. Entonces se verifica la relación $C + V = A + 2$*

Demostración

Esta demostración se debe a Cauchy. Vamos a seguir el desarrollo de la pueba con un prisma recto, no perdemos generalidad puesto que lo mismo ocurriría con cualquier poliedro convexo.Eliminemos una de las caras del poliedro (por ejemplo en el prisma la base superior)y el resto de las caras las llevamos a un plano tal como indica la figura 34.

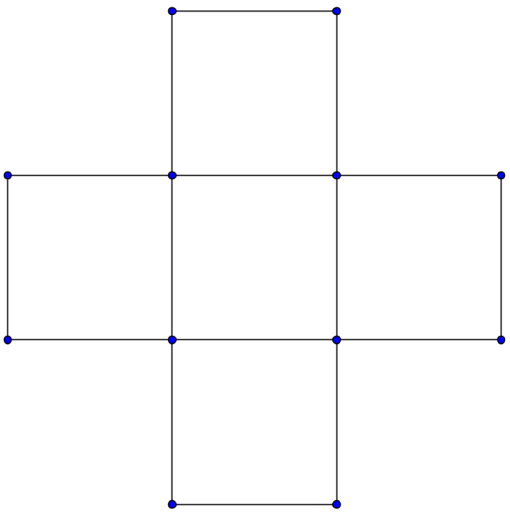


Figura 34: Eliminación de una de las caras desplegando las restantes sobre un plano

Dividimos en triángulos las caras trazando sucesivamente diagonales en las caras tal y como indicamos en la figura 35. A continuación vamos a eliminar los lados exteriores de los triángulos como indicamos en la figura. Este proceso lo vamos a riterar hasta que nos quede un único triángulo. Inicialmente queremos probar que $C + V = A + 2$. Como hemos eliminado una cara para desplegar la figura en el plano, la anterior relación en el espacio es equivalente a probar que en el plano se verifica $C + V = A + 1$, si demostramos esta relación en la figura desplegada en el plano estará demostrado el teorema. Llamamos C^i, V^i A^i al número de caras, vértices y aristas, respectivamente, que hay en la iteración i. Cada vez que creamos un triángulo en la iteración 1 aumentamos una cara, un vértice y dos aristas, es decir $C^1 = C + 1$, $V^1 = v + 1$ $A^1 = A + 2$,

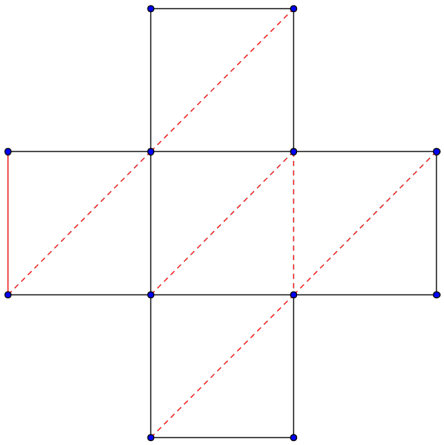


Figura 35: Division en triangulos de la figura

la expresión $C + V = A + 1$ *es equivalente a* $C^1 + V^1 = A^1 + 1$. *Lo mismo podemos decir para cada iteración* i

Cada vez que eliminamos los lados exteriores de un triángulo disminuimos una cara, un vértice y dos aristas por lo que sigue siendo válida la expresión $C + V = A + 1$. *Resumiendo, hemos demostrado que la expresión* $C + V = A + 1$ *es invariante frente a cualquier transformación dada en una iteración. Cuando lleguemos al final del proceso nos quedamos con un triángulo en donde* $C = 1$, $V = 3$ *y* $A = 1$ *en donde se verifica, evidentemente* $C + V = A + 1$, *por equivalencia esta expresión vale también para la figura desplegada en el plano y por ende se verifica, para el poliedro, que* $C + V = A + 2$

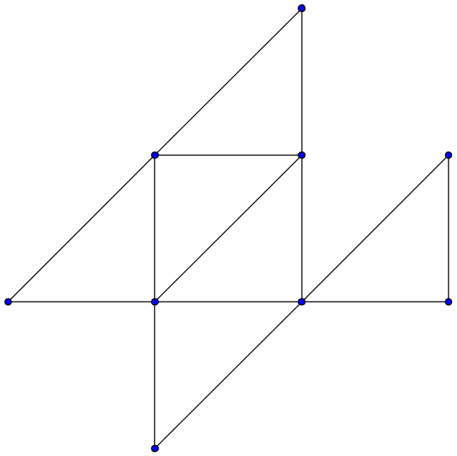


Figura 36: Eliminación de los lados exteriores de los triángulos