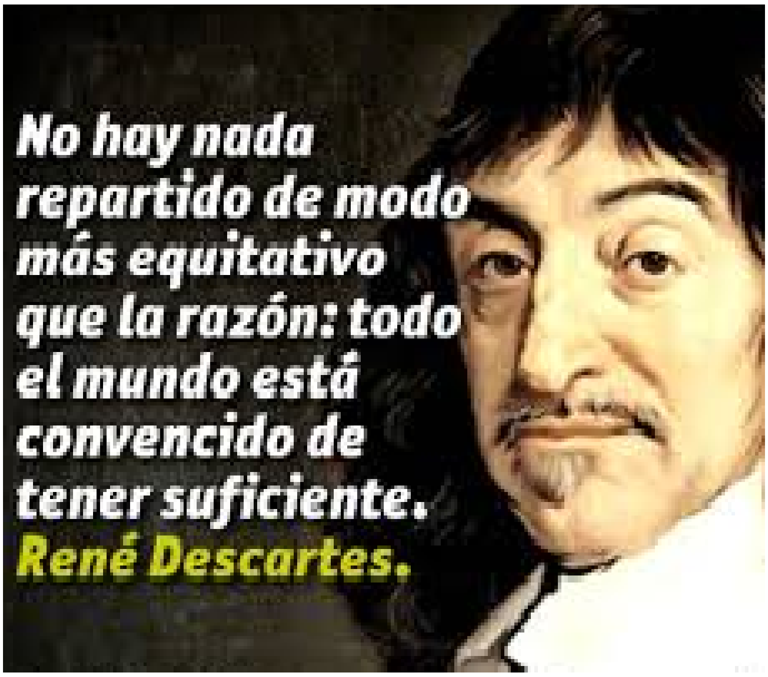
GEOMETRÍA ANALÍTICA

Miguel Galo Fernández

7 de abril de 2015



Índice de Contenidos

1. Introducción

Explicar a un principiante, como es un alumno de 4º de ESO, un tema tan abstracto como los vectores no es tarea fácil. Choco frontalmente con la banalización que se hace en la enseñanza de las matemáticas, dando recetas al alumno para que las memorice. Un segundo entorpecimiento es la obsesión enfermiza para encontrar utilidad al concepto, ¿ para qué sirven los vectores? La necesidad de los vectores la impuso la física pero, una vez creada la teoría de espacios vectoriales, la matemática pura no tiene interés alguno en su utilidad. Difícilmente se puede encontrar utilidad en unas enseñanzas tan básicas en el nivel de 4º ESO. He observado el desarrollo de la Geometría Analítica que se hace en los libros de texto y me da mucha tristeza. Un alumno me comentaba que él no podía o no sabía estudiar en el libro de texto, que se perdía. En efecto es así y ello se debe a que el texto no transmite conocimiento, transmite un recetario de algoritmos para resolver una serie de problemas que se proponen. El dislate llega hasta tal punto que para hallar el área de un triángulo conocidos tres de sus vértices se da la fórmula de Herón para poder llevar a cabo el cálculo, no se deben utilizar fórmulas que no se puedan demostrar si se quiere aprender matemática. ¿Nos hemos vuelto locos?¿Qué estamos haciendo? Cuando se introduce la ecuación de la recta se olvida que esta no es ni más ni menos que un conjunto infinito de puntos, que por ser infinito hay que definir por comprensión. La propiedad común al conjunto recta que hace posible su definición por comprensión es precisamente la ecuación de la recta. Si la ecuación de la recta es, por ejemplo, $y = 2x + 1$ los puntos de esta recta son aquellos en los que la ordenada es una unidad más que el doble de la abscisa, es decir que la recta es $\{(x, 2x + 1)\ \textit{tal que}\ x \in \mathbb{R}\}$. Este conjunto es imposible definirlo por extensión al ser infinito, pero podemos poner que es el conjunto $\{\cdots(-1,-1),\ (0,1),\ (1,3)\cdots\}$. Si no se le dice esto al alumno, ¿cómo puede adivinarlo él solo? Los conceptos de paralelismo, perpendicularidad,etc, se dan con recetarios. Parece ser que el objetivo final es que el alumno resuelva los ejercicios que se le proponen. Eso no es conocimiento, la práctica totalidad de los ejercicios propuestos en el tema de geometría analítica se pueden resolver con software específico, por ejemplo con Geogebra que es gratuito. Si lo que se quiere conseguir en vez de conocimiento es destreza en resolver sencillos problemas geométricos, pues bastaría con ejercitar al alumno en el manejo de este software, va más rápido y las gráficas son más pulcras aunque no se sepa lo que se hace.

No hace falta que nos diagnostiquen informes Pisa, pruebas diagnóstico, etc. Si vemos como se están enseñando las matemáticas podremos adivinar que conocimientos pueden tener los estudiantes. En la ESO se memoriza pero no se razona. Se insiste mucho en que los alumnos sepan de memoria las tablas de multiplicar pero no hay interés en que adquieran conocimiento sabiendo lo que hacen cuando multiplican. El gran error que se comete, especialmente los que enseñan matemáticas, es ***"confundir causa con consecuencia: enseñamos la resolución de los problemas antes de enseñar a entenderlos"*** (José Antonio Fernández Bravo, decano de la Facultad de Ciencias Sociales y de la Educación de la Universidad Camilo José Cela)

Muchas familias estarán hartas de oir a la dirección de los centros y a la gran mayoría de los profesores la recomendación del "esfuérzate ". ¿En qué?, se puede preguntar el alumno. ¿En seguir sin comprender una y otra cosa? Yo no me puedo esforzar en comprender que indica la ecuación de una recta si antes no me explican la definición de un conjunto por comprensión. Por mucho que me esfuerce, por muy disciplinado que sea y por muchas operaciones que haga, jamás lo entenderé.

En opinión de Fernández Bravo, una metodología es buena en la medida en que genere **mejores resultados con menos esfuerzo**. "¿Qué está pasando hoy?", se pregunta. "Que no hay avance didáctico". ¿Por qué? Porque en vez de conseguir mejores resultados con menor esfuerzo, se tienen peores resultados con un esfuerzo impresionante del alumno, haciendo cantidad de ejercicios, con un esfuerzo impresionante del profesor y además con unas notas exteriores que no son buenas. ¿Cuál es la metodología innovadora? Es la que ofrece mejores resultados, no es la que trae el iPad a las escuelas".

Otro de los vicios de la enseñanza en los niveles de ESO es el adelantar contenidos. Me explico, el tema de Geometría Analítica que nos ocupa, ha adelantado contenidos del bachiller y aquí se ve poco y mal, muy mal, a base de algoritmos calculistas. La noción de perpendicularidad, por ejemplo, se menciona pero no se explica. Es un dislate parecido al desarrollo programático del tema de logaritmos: para decir lo poquísimo que se dice y lo mal que se dice mejor se está callado . El Libro de Texto de 4º ESO opción B (Anaya) hace un rídiculo espantoso cuando trata el tema de logaritmos.

El desarrollo de la Geometría Analítica que hacen los libros de texto es un verdadero engaño ya que no transmite conocimiento. Sin conocimiento no hay espíritu crítico y sin este no podemos estar seguros a la hora de asignar un valor de verdad a los discursos que se generen. Precisamente lo que caracteriza a un fanático es la posesión de un fuerte espíritu crítico que carece de conocimiento.

En mi opinión es más importante centrarse en enseñar matemáticas demostrando todo lo que se explique, que enseñar a resolver problemas por medio de algoritmos descerebrados. De momento esto es lo que no estamos haciendo y así nos va.

Para finalizar, he desarrollado el tema de Geometría Analítica siguiendo el orden del libro de texto de Anaya 4º ESO opción B sobre la marcha, sin pararme a pensar la forma más elegante y precisa de la exposición; mi objetivo consitía en ver el nivel de dificultad que ello suponía y resultó ser ninguno. He ampliado aquellas partes que por raquíticas me parecieron que contribuían más a la confusión que a la economía en el desarrollo. La mayoría de los ejercicios que propone el texto son repetitivos y triviales a la hora de encontrar la solución. Resolví los que me parecieron más interesantes y difíciles.

2. Vectores en el plano

Un vector son dos puntos dados en cierto orden. Cuando nos referimos al vector $\overrightarrow{AB}$ estamos indicando:

i) Módulo del vector, que se representa por $|\overrightarrow{AB}|$ y que es la langitud del segmento de extremos en los puntos A y B.

ii) Dirección: es la recta que pasa por los puntos A y B.

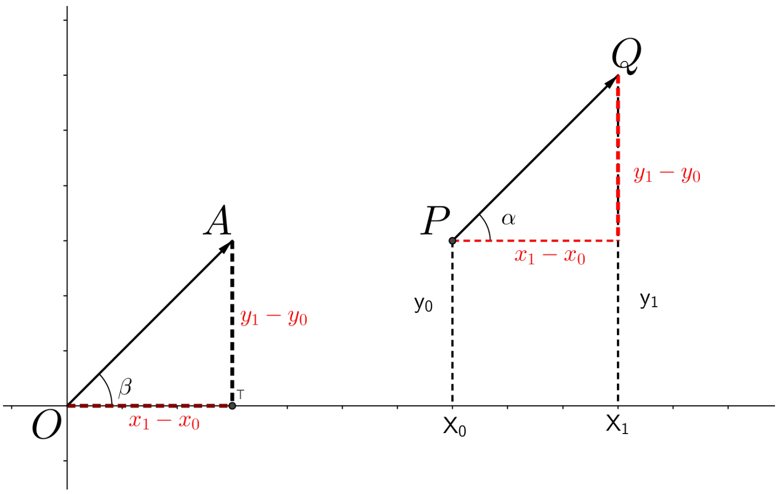
iii) Es el sentido en que se recorre la dirección, lo indica la flecha y en este caso es de A hacia B.

2.1. Equipolencia de vectores

Dos vectores del plano son equipolentes si tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido. Llamamos vector del plano al conjunto infinito formado, por un vector y todos sus equipolentes. Si $\vec{v}$ es un vector del plano denotaremos también por $\vec{v}$ al conjunto, infinito, de todos sus equipolentes. A esto se le llama abuso de notación pero no ha de darnos lugar a duda. Si $\vec{u} = \vec{v}$ (como vectores) entonces también se verifica que $\vec{u} = \vec{v}$ (como conjunto infinito). Tal y como hemos definido los vectores, el vector $\vec{v}$ estará definido por dos puntos $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$

2.2. Coordenadas de un vector

Sean los puntos $P(x_o, y_o)$ y $Q(x_1, y_1)$. El vector de origen P y extremo Q tiene por módulo $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$. Si consideramos el punto $A(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$, siendo $O(0, 0)$ el origen de coordenadas, el vector $\overrightarrow{OA}$ es equipolente al vector $\overrightarrow{PQ}$

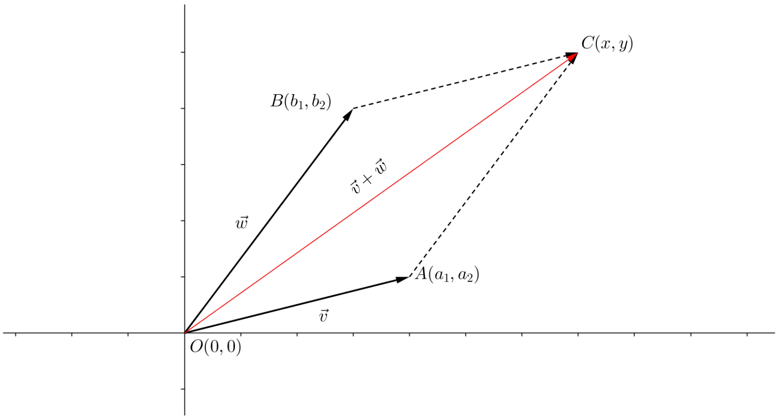


Que los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{PQ}$ tienen el mismo módulo es evidente. Fijémonos en la figura anterior. Como $\tan \alpha = \dfrac{y_1 - y_o}{x_1 - x_0} = \tan \beta$ y los ángulos están en el mismo cuadrante, entonces $\alpha = \beta$. Esto se traduce en que las rectas son paralelas. Evidentemente tienen el mismo sentido (recorrido de izquierda a derecha).

Si las coordenadas del punto A son (x_0, y_0) y las coordenadas de B son (x_1, y_1) entonces las coordenadas del vector $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ son $\vec{v} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$

2.3. Suma de vectores. Regla del paralelogramo

Sean los vectores $\vec{v} = (v_0, v_1)$, $\vec{w} = (w_0, w_1)$. Definimos la suma $\vec{v} + \vec{w}$ como aquel vector que tiene de coordenadas $(v_0 + w_0, v_1 + w_1)$. Ya hemos visto que cualquier vector tiene un equipolente cuyo origen está en el origen de coordenadas O. Si el extremo del vector es el punto $A(a_1, a_2)$ el vector es $\vec{v} = \overrightarrow{OA} = (a_1, a_2)$. Si tenemos otro vector $\vec{w}$ con extremo $B(b_1, b_2)$ entonces $\vec{w} = \overrightarrow{OB} = (b_1, b_2)$, tal y como se presenta en la figura siguiente



La suma de los vectores es el vector $\vec{v} + \vec{w}$ que tiene como origen el de coordenadas y como extremo el punto C. Entonces las coordenadas de C serían $C(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$, ¿ esto es así? Como los vectores $\overrightarrow{BC} = (x - b_1, y - b_2)$ y $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2)$ han de ser iguales se verifica:

$$\left\{ \begin{array}{lll} x - b_1 = a_1 & \Rightarrow & x = a_1 + b_1 \\ y - b_2 = y & \Rightarrow & y = a_2 + b_2 \\ \end{array} \right.$$

Por lo tanto $C(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$. De aquí viene la regla del paralelogramo para sumar gráficamente los vectores, la regla dice así: Para sumar dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ se forma un paralelogramo con ellos. La diagonal principal de este paralelogramo es la suma $\vec{v} + \vec{w}$

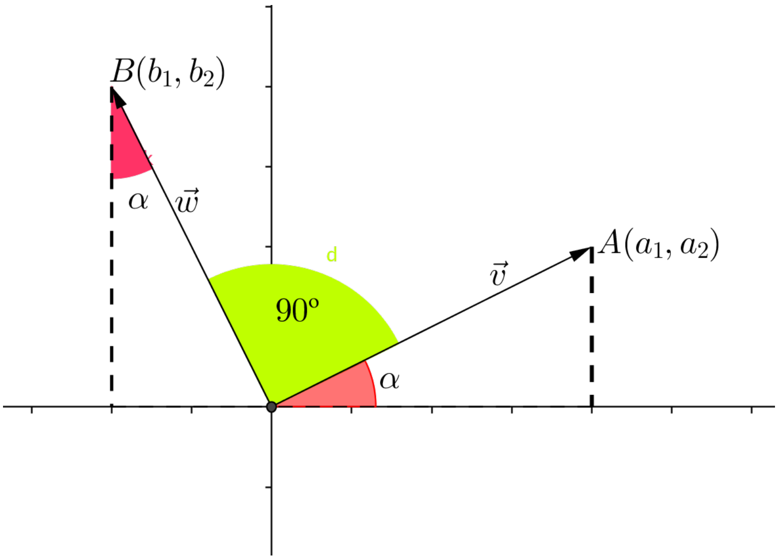
2.4. Producto de un vector por un número

El producto de un número $k \in \mathbb{R}$ por un vector $\vec{v}$ se representa por $k \cdot \vec{V}$ y es un nuevo vector con la misma dirección y sentido que $\vec{v}$, siendo su módulo el producto de k por el de $\vec{v}$

Si las coordenadas de $\vec{v}$ son (v_1, v_2) entonces $k \cdot \vec{v} = (kv_1, kv_2)$

2.5. Vectores perpendiculares

Un vector $\vec{v}$ tiene infinitos vectores perpendiculares. Si por ejemplo $\vec{w}$ fuera un vector perpendicular a $\vec{v}$, tambien sería perpendicular a $\vec{v}$ el vector $k\vec{w}$, $\forall k \in \mathbb{R}$. Dado un vector $\vec{v} = \overrightarrow{OA} = (a_1, a_2)$ vamos a obtener las coordenadas de un vector perpendicular $\vec{w} = \overrightarrow{OB}$ y con el mismo módulo que $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$. La soituación la reflejamos en la siguiente figura:



Sea $m=|\vec{v}|=|\vec{w}|$. En el triángilo rectángulo del primer cuadrante $a_1=m\cdot cos\alpha,\ a_2=$ $=m\cdot sen\alpha$. Si nos fijamos ahora en el triángulo rectángulo del segundo cuadrante $b_1=$ $=-m\cdot sen\alpha,\ b_2=m\cdot sen\alpha$, es decir $b_1=-a_2,\ b_2=a_1$. Un vector perpendicular a $\vec{v}=(a_1,a_2)$ y con el mismo módulo es $\vec{w}=(-a_2,a_1)$

3. Puntos en un segmento

Consideremos el segmento de origen $A(a_1,a_2)$ y extremo $B(b_1,b_2)$. Si $P(x,y)$ es un punto cualquiera del segmento $\overline{AB}$ es evidente que $\overrightarrow{AP}=t\cdot\overrightarrow{AB}$, además $0\leq t\leq 1$ ¿Qué indica t? Pues la razón entre el módulo de $\overrightarrow{AB}$ y el módulo de $\overrightarrow{AP}$. Por ejemplo si P fuera el punto medio del segmento entonces la mencionada razón sería $t=\dfrac{1}{2}$ Llamemos $M(x,y)$ al punto medio en vez de P, ¿ cuáles son las coordenadas de M? Si ponemos la expresión $\overrightarrow{AM}=t\cdot\overrightarrow{AB}$ en forma coordenada tenemos:

$$(x-a_1,y-a_2)=\frac{1}{2}(b_1-a_1,b_2-a_2)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} x-a_1=\dfrac{b_1-a_1}{2}\Rightarrow x=\dfrac{a_1+b_1}{2}\\ y-a_2=\dfrac{b_2-a_2}{2}\Rightarrow y=\dfrac{a_2+b_2}{2}\end{array}\right.$$

Las coordenadas del punto medio del segmento son $M\left(\dfrac{a_1+b_1}{2},\dfrac{a_2+b_2}{2}\right)$

4. Simétrico de un punto respecto a otro punto

Sean A y P dos puntos del plano. Se dice que A' es el simétrico de A respecto a P, si P es el punto medio del segmento $\overline{AA'}$. Si las coordenadas de los puntos son $A(a-1,a-2)$ y $P(p_1,p_2)$. Sea $A'(x,y)$ el simétrico de A respecto a P. Entonces al ser P el punto medio se $\overline{AA'}$ obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{a_1+x}{2}=p_1\Rightarrow x=2p_1+a_1\\ \\ \dfrac{a_2+y}{2}=p_2\Rightarrow y=2p_2+a_2\end{array}\right.$$

Las coordenadas del simétrico de A son $A'(2p_1-a_1,2p_2-a_2)$

5. ECUACIONES DE LA RECTA

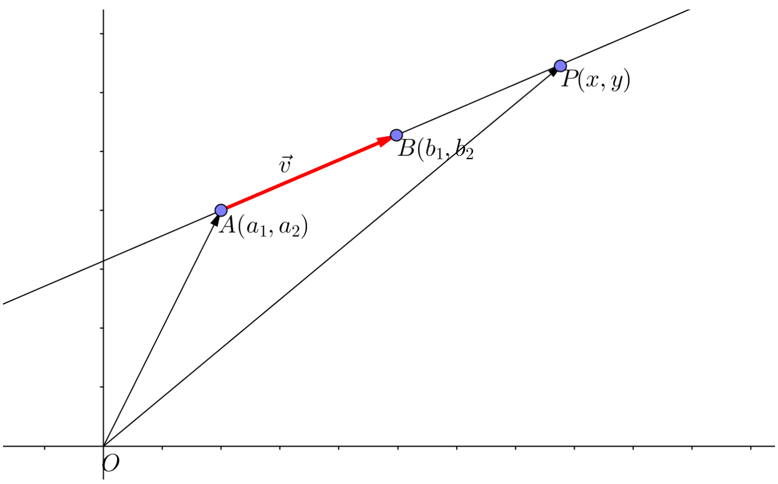
Una recta es un conjunto de puntos. Hay dos maneras de definir un conjunto:

- Por extensión, diciendo cuales son todos sus elementos. Por ejemplo puedo definir los números pares menores que 10, es el conjunto $P_{<10} = \{2, 4, 6, 8\}$
- Por comprensión, dando una propiedad que tienen todos los elementos del conjunto. Por ejemplo no puedo definir por extensión todos los números pares porque se trata de un conjunto infinito. Este ha de definirse por comprensión, los números pares son múltiplos de dos, es decir de la forma $2n$. Entonces el conjunto P de los números pares es $P = \{2n \ tal \ que \ n \in \mathbb{N}\}$

Una recta es un conjunto infinito que no se puede definir por extensión, hemos de hacerlo por comprensión. Precisamente con la ecuación de la recta lo que pretendemos es dar esa propiedad que tienen en común todos los elementos del conjunto infinito.

Uno de los axiomas de Euclides dice que por dos puntos pasa una única recta y si esto es así, hemos de ser capaces de definir la recta a partir de dos de sus puntos. Sean $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$ dos puntos de una recta. Llamamos vector director de la recta a cualquier vector sobre la recta, que en nuestro caso puede ser $\vec{v} = (v_1, v_2) = \overrightarrow{AB} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$. Hagamos una representación gráfica:

5.1. Ecuacion vectorial de la recta



Si P es un punto cualquiera de la recta l que pasa por A y B, teniendo en cuenta la regla del paralelogramo se cumple que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$. Como $\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{v}$, se tiene que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\vec{v}$. Poniendo esta última ecuación vectorial en forma coordenada se obtiene $\boxed{(x, y) = (a_1, a_2) + \lambda(v_1, v_2)}$, a esta ecuación se le conoce como ecuación vectorial de la recta. La recta por comprensión es $l = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ (x, y) = (a_1, a_2) + \lambda(v_1, v_2), \ \lambda \in \mathbb{R}\}$

5.2. Ecuación paramétrica de la recta

Si en la ecuación vectorial despejamos la abscisa (x) y la ordenada(y) obtenemos el siguiente sistema, ***llamado ecuación paramétrica de la recta*** $\left.\begin{array}{c} x = a_1 + \lambda v_1 \\ y = a_2 + \lambda v_2 \end{array}\right\}$

Podríamos ahora definir la recta l como $l = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x = a_1+\lambda v_1, \ y = a_2+\lambda v_2, \ \lambda \in \mathbb{R}\}$

5.3. Ecuación continua de la recta

Si despejamos λ de la ecuación paramétrica obtenemos $\left\{\begin{array}{l} \lambda = \dfrac{x-a_1}{v_1} \\ \lambda = \dfrac{y-a_2}{v_2} \end{array}\right.$

Igualando las dos expresiones de λ obtenidas nos queda la ecuación $\boxed{\dfrac{x-a_1}{v_1} = \dfrac{y-a_2}{v_2}}$ que es conocida como la ecuación continua de la recta. La expresión de l por comprensión sería $l = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \dfrac{x-a_1}{v_1} = \dfrac{y-a_2}{v_2}\right\}$. Hay que llevar cuidado con esta expresión. Aquí el denominador no tiene significado de cociente. Por ejemplo la recta de ecuación continua $\dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y+3}{2}$ es la que pasa por el punto $A)1,-3)$ y tiene por vector director $\vec{v} = (0,2)$, nunca debe entenderse como fracción la expresión $\dfrac{x-1}{0}$

5.4. Ecuación general de la recta

Si desarrollamos la ecuación continua $(x-a_1)v_2 = (y-a_2)v_1 \Rightarrow v_2x - v_1y + v_1a_2 - v_2a_1 = 0$. Si llamamos $A = v_2, \ B = -v_1, \ C = v_1a_2 - v_2a_1$, nos queda la ecuación $\boxed{Ax + By + C = 0}$ también conocida como ecuación general de la recta. La definición de la recta l por comprensión sería $l = \{(x,y) \in \mathbb{R}/Ax + By + C = 0\}$

Dada la ecuación de la recta $Ax+By+C = 0$ el vector director de la recta es $\vec{v} = (-B, A) = (v_1, v_2)$ es el vector de la recta. El vector $\vec{n} = (A, B) = (v_2, -v_1)$ es un vector perpendicular a la recta, llamado vector normal de la recta. La ecuación general de la recta es la más importante.

5.5. Ecuación punto-pendiente de la recta

Sean los puntos $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$ dos puntos de una recta. El vector director de la recta es $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (v_1, v_2)$ donde $v_1 = b_1 - a_1, \ v_2 = b_2 - a_2$ 1ver la figura

Se tiene que $\tan\alpha = \dfrac{y-a_2}{x-a_1} = \dfrac{b_2-a_2}{b_1-a_1} = m$. Llamamos pendiente de la recta a la tangente del ángulo que forma la recta con el eje positivo de abscisas, en nuestro caso la pendiente es m. Podemos expresar la ecuación de la recta como $\boxed{y - a_2 = m(x - a_1)}$, a esta ecuación se le llama ecuación punto-pendiente de la recta. En este caso la definición de la recta sería $l = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/y - a_2 = m(x - a_1)\}$

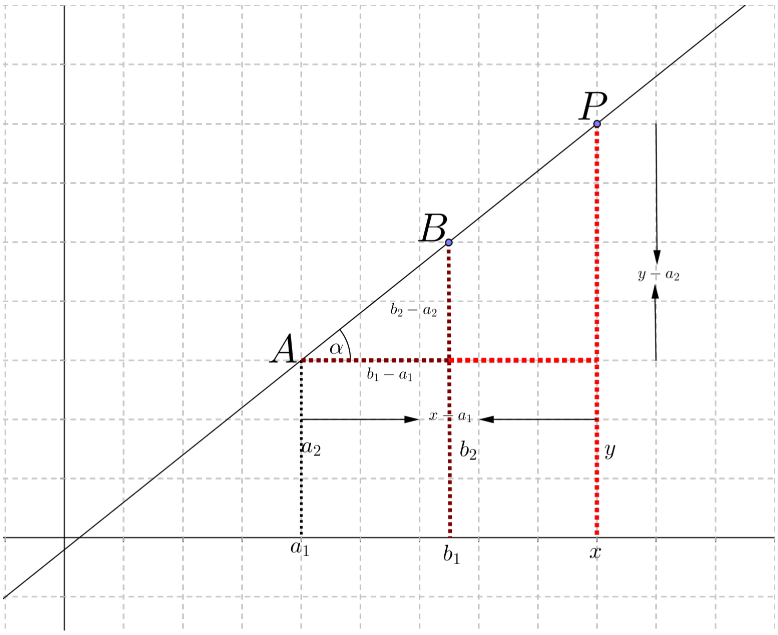
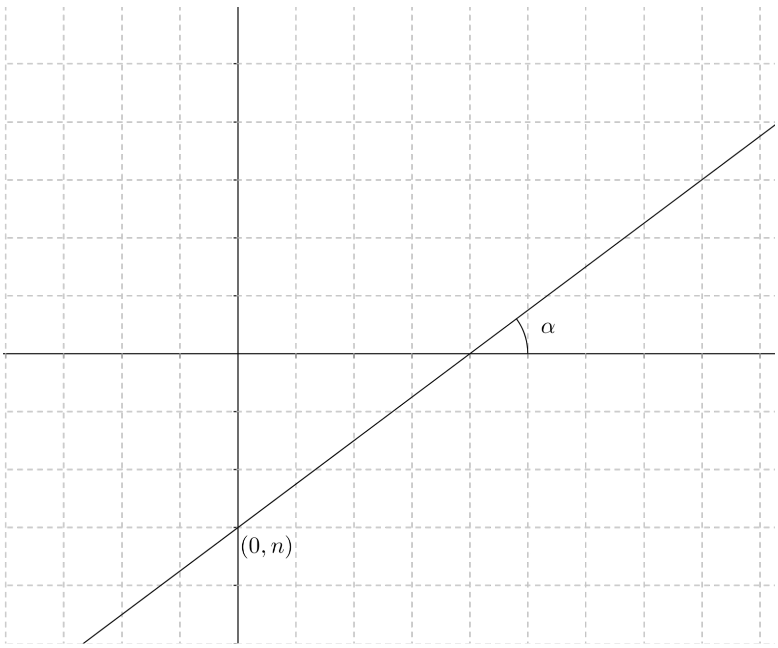


Figura 1: Ecuación punto-pendiente de la recta

5.6. Ecuación explícita de la recta

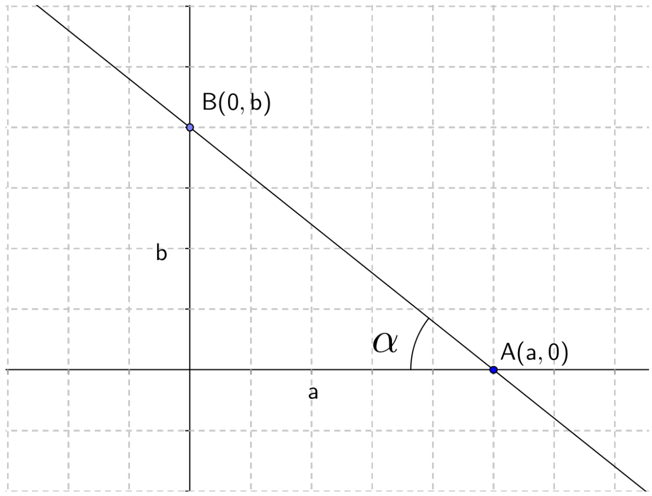
Si despejamos y en la ecuación punto-pendiente de la recta y agrupamos términos obtenemos $y - a_2 = mx - ma_1 \Rightarrow y = mx + n$, siendo $n = a_2 - ma_1$. ¿Qué significado tiene esta ecuación? La pendiente m ya sabemos lo que es. Si damos a x el valor cero, y tendrá el valor n. Por tanto n es la ordenada en el origen, es decir que la recta corta al eje de ordenadas en el punto $(0, n)$



La definicón por comprensión de la recta, en este caso, es $l = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = mx + n\}$

5.7. La ecuación canónica de la recta

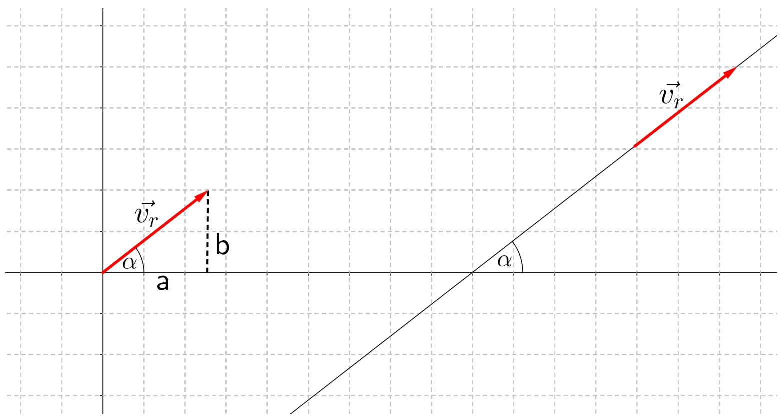
Si la recta corta a los ejes coordenados en los punros $A(a, 0)$ y $B(0, b)$ su ecuación es $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$



Tenemos que la pendiente es $m = \tan\alpha = -\frac{b}{a}$, tomando como punto (a,0) la ecuación punto-pendiente es $y = -\frac{b}{a}(x-a) \Rightarrow ay = -bx + ab \Rightarrow bx + ay = ab \Rightarrow \frac{\cancel{b}x}{a\cancel{b}} + \frac{\cancel{a}y}{\cancel{a}b} = \frac{ab}{ab} = 1$

6. Pendiente de una recta a partir de su vector director

Sea r una recta con vector director $\vec{v_r} = (a, b)$. Este vector tendrá un equipolente con origen en el origen de coordenadas y con extremo el punto A(a,b). Si α es el ángulo que forma el vector director con el semieje positivo de abscisas, da lo mismo decir que α es el ángulo que forma la recta con el semieje positivo de abscisas.



La pendiente de la recta es $m = \tan\alpha = \frac{b}{a}$

7. Paralelismo de rectas

Dos rectas r y s son paralelas si sus vectores ditectores son iguales o proporcionales. Si los vectore de las rectas r y s son respectivamente $\vec{v_r}$ y $\vec{v_s}$ la condición de paralelismo es $\vec{v_r} = \vec{v_s}$ o bien $\vec{v_r} = k\vec{v_s}$ donde k es un número real cualquiera. esto se traduce en que si dos rectas son paralelas tienen la misma pendiente.

Si la ecuación de la recta se pone en forma vectorial, paramétrica o continua, la condición de paralelismo viene determinada por la proporcionalidad entre los vectores directores o en su igualdad (razón de proporcionalidad 1). Si los vectores directores de las rectas r y s son, respectivamente, $\vec{v}_r = (a,b), \vec{v}_s = (c,d)$ entonces la condición de paralelismo de las rectas viene dada por $\vec{v}_r = (a,b) = \lambda\vec{v}_s = (c,d)$ siendo $\lambda \in \mathbb{R}$, es decir $(a,b) = (\lambda c, \lambda d)$ y de aquí obtenemos, despejando λ que $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$. Si las ecuaciones de las rectas r y s estuvieran en forma general $r \equiv Ax + By + C = 0$ y $s \equiv A'x + B'y + C' = 0$, sabemos que sus vectores directores son, respectivamente, $\vec{v}_r = (-B, A)$ y $\vec{v}_s = (-B', A')$ y la condición de paralelismo es $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'}$

En forma punto-pendiente o en forma explícita la condición de paralelismo se traduce, evidentemente, en la igualdad de la pendiente, es decir si $r \equiv y = mx + n$ y $s \equiv y = m'x + n'$, entonces r es paralela a s si y solo si $m = m'$

8. Perpendicularidad de rectas

Es equivalente decir que dos rectas son perpendiculares y que son perpendiculares sus vectores directores. Si la recta r es perpendicular a la recta s sus vectores directores son de la forma $\vec{v}_r = (a,b)$ y $\vec{v}_s = (-kb, ka)$. Si la pendiente de r es $m_r = \dfrac{b}{a}$, la pendiente de la perpendicular es $m_s = \dfrac{-\cancel{k}a}{\cancel{k}b} = -\dfrac{1}{m_r}$

Podemos concluir diciendo que las rectas $r \equiv y = m_r x + n_r$ y $s \equiv y = m_s x + n_s$ son perpendiculares cuando $m_s = \dfrac{-1}{m_r} \Leftrightarrow m_r \cdot m_s = -1$

9. Rectas paralelas a los ejes

9.1. Rectas paralelas al eje de abscisas

El eje de abscisas tiene como vector director $\vec{v} = (1,0)$ y pasa por el origebn de coordenadas $O(0,0)$. Su pendiente es por tanto $m = \dfrac{0}{1} = 0$. Su ecuación punto pendiente es $y = 0$. Cualquier recta paralela al eje de abscisas que pase por el punto $A(a,b)$ tendra por pendiente $m = 0$ y su ecuación punto-pendiente será $y = b + 0(x - a) \Rightarrow y = b$

9.2. Rectas paralelas al eje de ordenadas

El eje de ordenadas es una recta que pasa por el origen $O(0,0)$ y tiene por vector director $\vec{v} = (0,1)$. Su pendiente es indeterminada ya que $m = \dfrac{1}{0}$ no se puede calcular. Su ecuación continua sería $\dfrac{y}{1} = \dfrac{x}{0} 1 \cdot x = 0 \cdot y \Rightarrow x = 0$. La ecuación del eje de ordenadas es $x = 0$. Una paralela a esta recta que pasa por el punto $A(a,b)$ tendrá de ecuación $x = a$

10. Posición relativa de dos rectas

Dos rectas en el plano, se cortan (son secantes) en un único punto, son paralelas o coinciden. Vamos a ver la posición relativa de dos rectas con ecuación explícita y general. Si se diera en otra forma la ecuación de la recta, se pasaría a una de estas.

Sean las rectas $r \equiv Ax + By + C = 0$ y $s \equiv A'x + B'y + C' = 0$.

1. Si sus vectores directores no son proporcionales se cortan y esto es así cuando $\dfrac{A}{A'} \neq \dfrac{B}{B'}$

2. Si sus vectores directores son proporcionales son paralelas, esto se produce si $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'}$

3. Hay una situación en la que $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'}$, en este caso las rectas r y s son la misma aunque una de las ecuaciones se obtiene multiplicando por una constante la otra.

En caso de que las rectas sean secantes, su punto de intersección se obtiene resolviendo el sistema que forman sus ecuaciones.

Si ahora tenemos en forma explícita las ecuaciones de las rectas $r \equiv y = m_r x + n_r$ y $s \equiv y = m_s x + n_s$, si tienen distinta pendiente $m_r \neq m_s$ las rectas se cortan. Si tienen igual pendiente las rectas son paralelas y si además de esto también tienen igual su ordenada en el origen las dos rectas coinciden.

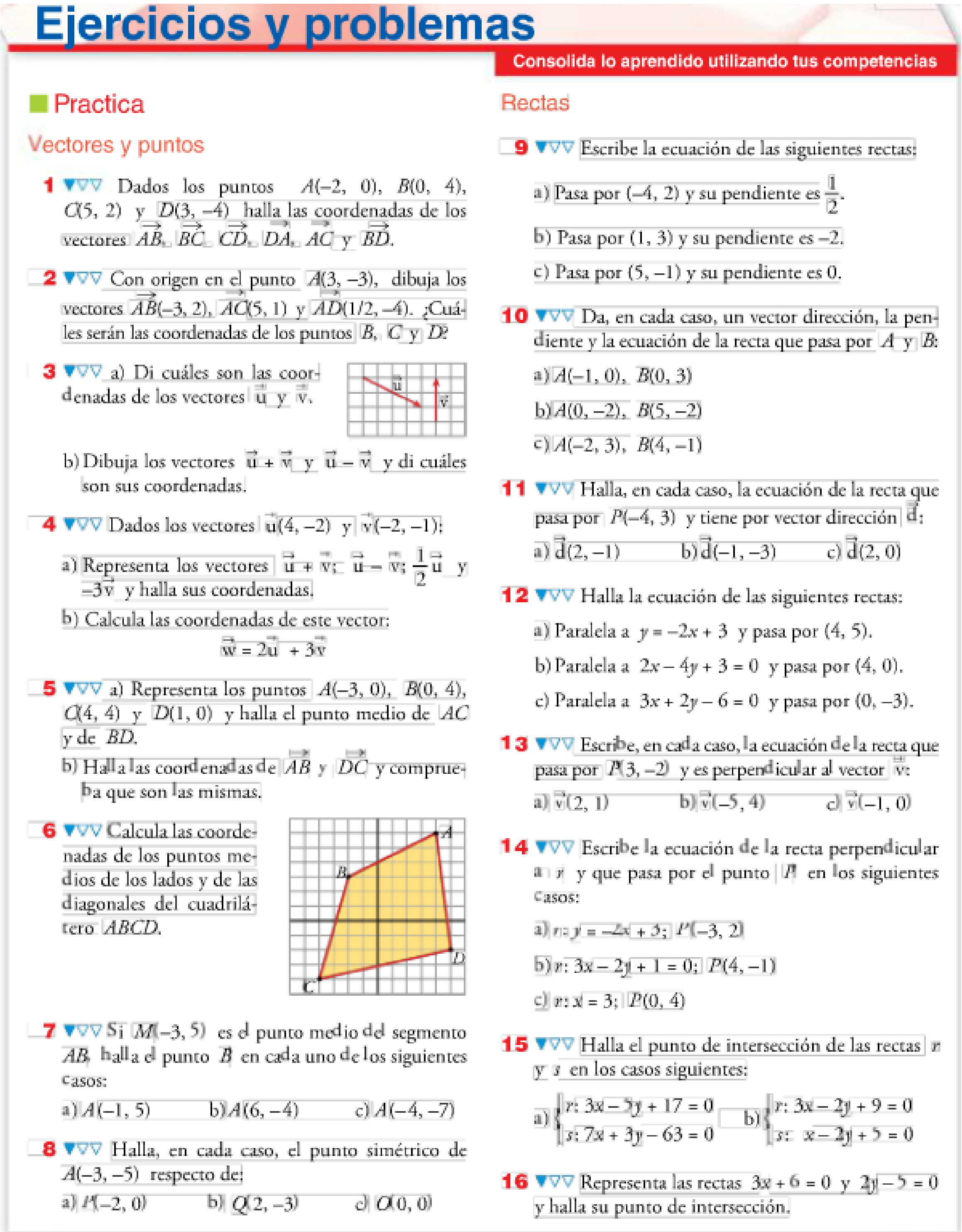
11. Distancia entre dos puntos del plano

Sean los puntos del plano $A(a-1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$. Se define la distancia entre A y B como $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1}^2 + (b_2 - a_2)^2$. Esta expresión ya la demostramos cuando vimos las coordenadas de un vector.

12. Ejercicios

12.1. Página 177

Todos los ejercicios de esta página son de aritmética de lápiz y papel. No hay que hacer razonamientos para hallar la solución, se aplica la teoría y ya está



Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Practica

Vectores y puntos

1 Dados los puntos $A(-2, 0)$, $B(0, 4)$, $C(5, 2)$ y $D(3, -4)$ halla las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BD}$.

2 Con origen en el punto $A(3, -3)$, dibuja los vectores $\overrightarrow{AB}(-3, 2)$, $\overrightarrow{AC}(5, 1)$ y $\overrightarrow{AD}(1/2, -4)$. ¿Cuáles serán las coordenadas de los puntos B, C y D?

3 a) Di cuáles son las coordenadas de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

b) Dibuja los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ y di cuáles son sus coordenadas.

4 Dados los vectores $\vec{u}(4, -2)$ y $\vec{v}(-2, -1)$:

a) Representa los vectores $\vec{u} + \vec{v}$; $\vec{u} - \vec{v}$; $\frac{1}{2}\vec{u}$ y $-3\vec{v}$ y halla sus coordenadas.

b) Calcula las coordenadas de este vector:

$$\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$$

5 a) Representa los puntos $A(-3, 0)$, $B(0, 4)$, $C(4, 4)$ y $D(1, 0)$ y halla el punto medio de AC y de BD.

b) Halla las coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$ y comprueba que son las mismas.

6 Calcula las coordenadas de los puntos medios de los lados y de las diagonales del cuadrilátero $ABCD$.

7 Si $M(-3, 5)$ es el punto medio del segmento AB, halla el punto B en cada uno de los siguientes casos:

a) $A(-1, 5)$ b) $A(6, -4)$ c) $A(-4, -7)$

8 Halla, en cada caso, el punto simétrico de $A(-3, -5)$ respecto de:

a) $P(-2, 0)$ b) $Q(2, -3)$ c) $O(0, 0)$

Rectas

9 Escribe la ecuación de las siguientes rectas:

a) Pasa por $(-4, 2)$ y su pendiente es $\frac{1}{2}$.

b) Pasa por $(1, 3)$ y su pendiente es -2.

c) Pasa por $(5, -1)$ y su pendiente es 0.

10 Da, en cada caso, un vector dirección, la pendiente y la ecuación de la recta que pasa por A y B:

a) $A(-1, 0)$, $B(0, 3)$

b) $A(0, -2)$, $B(5, -2)$

c) $A(-2, 3)$, $B(4, -1)$

11 Halla, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por $P(-4, 3)$ y tiene por vector dirección $\vec{d}$:

a) $\vec{d}(2, -1)$ b) $\vec{d}(-1, -3)$ c) $\vec{d}(2, 0)$

12 Halla la ecuación de las siguientes rectas:

a) Paralela a $y = -2x + 3$ y pasa por $(4, 5)$.

b) Paralela a $2x - 4y + 3 = 0$ y pasa por $(4, 0)$.

c) Paralela a $3x + 2y - 6 = 0$ y pasa por $(0, -3)$.

13 Escribe, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por $P(3, -2)$ y es perpendicular al vector $\vec{v}$:

a) $\vec{v}(2, 1)$ b) $\vec{v}(-5, 4)$ c) $\vec{v}(-1, 0)$

14 Escribe la ecuación de la recta perpendicular a r y que pasa por el punto P en los siguientes casos:

a) $r: y = -2x + 3$; $P(-3, 2)$

b) $r: 3x - 2y + 1 = 0$; $P(4, -1)$

c) $r: x = 3$; $P(0, 4)$

15 Halla el punto de intersección de las rectas r y s en los casos siguientes:

a) $\begin{cases} r: 3x - 5y + 17 = 0 \\ s: 7x + 3y - 63 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} r: 3x - 2y + 9 = 0 \\ s: x - 2y + 5 = 0 \end{cases}$

16 Representa las rectas $3x + 6 = 0$ y $2y - 5 = 0$ y halla su punto de intersección.

12.2. página 178

Todos los ejercicios de esta página, son de aritmética de lápiz y papel. No hay que hacer razonamientos para hallar la solución, se aplica la teoría y ya está

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Distancias y circunferencia

17 Calcula la distancia entre P y Q:

a) $P(3, 5)$, $Q(3, -7)$ b) $P(-8, 3)$, $Q(-6, 1)$

c) $P(0, -3)$, $Q(-5, 1)$ d) $P(-3, 0)$, $Q(15, 0)$

18 a) Halla el punto medio del segmento de extremos $A(-2, 0)$, $B(6, 4)$.

b) Comprueba que la distancia del punto medio a cada uno de los extremos es la misma.

19 Comprueba que el triángulo de vértices $A(-1, 0)$, $B(3, 2)$, $C(7, 4)$ es isósceles. ¿Cuáles son los lados iguales?

20 Comprueba, mediante el teorema de Pitágoras, que el triángulo de vértices $A(-2, -1)$, $B(3, 1)$, $C(1, 6)$ es rectángulo.

21 Escribe la ecuación de la circunferencia de centro C y radio r:

a) $C(4, -3)$, $r = 3$ b) $C(0, 5)$, $r = 6$

c) $C(6, 0)$, $r = 2$ d) $C(0, 0)$, $r = 5$

22 Di cuáles son el centro y el radio de las circunferencias siguientes:

a) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$

b) $(x + 1)^2 + y^2 = 81$

c) $x^2 + y^2 = 10$

Aplica lo aprendido

23 A partir del punto $P(1, 3)$, trazamos el vector $2\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$ y llegamos al punto Q. Averigua las coordenadas de Q si conocemos $\vec{u}(2, 1)$, $\vec{v}(3, -1)$ y $\vec{w}(2, 3)$.

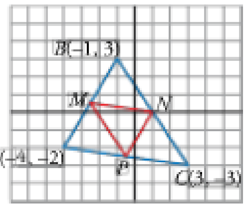
24 a) Representa los vectores $\vec{u} = 2\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$ y $\vec{v} = -\vec{x} + 4\vec{y} - 2\vec{z}$ siendo $\vec{x}(2, 2)$, $\vec{y}(3, 0)$ y $\vec{z}(1, -2)$.

b) Halla las coordenadas de $\vec{u}$ y $\vec{v}$. ¿Son iguales?

25 Averigua el valor de k para que se cumpla:

$$\left(\frac{6}{5}, -2\right) = k(-3, 5)$$

26 a) Determina las coordenadas de los puntos M, N y P que son los puntos medios de los lados del triángulo ABC.



b) Halla las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$ y $\overrightarrow{PN}$ y comprueba que $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{PN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

27 Dados los vectores $\vec{u}(3, 2)$, $\vec{v}(x, 5)$ y $\vec{w}(8, y)$, calcula x e y para que se verifique:

$$2\vec{u} - \vec{v} = \vec{w}$$

28 Dados los vectores $\vec{u}(5, -3)$, $\vec{v}(1, 3)$ y $\vec{w}(2, 0)$, calcula el valor de m y n para que se verifique:

$$\vec{u} = m\vec{v} + n\vec{w}$$

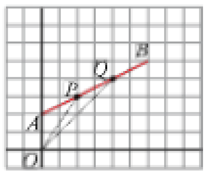
29 Comprueba, en cada caso, que los puntos dados están alineados:

a) $A(1, 2)$, $B(4, 3)$, $C(19, 8)$

b) $P(-2, -3)$, $Q(2, 0)$, $R(-26, -21)$

30 Calcula m para que los puntos $R(5, -2)$, $S(-1, 1)$ y $T(2, m)$ estén alineados.

31 En el segmento AB de extremos $A(0, 2)$ y $B(6, 5)$, halla las coordenadas de los puntos P y Q tales que:



$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

32 Comprueba si los puntos $A(18, 15)$ y $B(-43, -5)$ pertenecen a la recta $x - 3y + 27 = 0$.

33 Calcula m y n para que las rectas

$$r: 3x + my - 8 = 0 \qquad s: nx - 2y + 3 = 0$$

se corten en el punto $P(1, 5)$.

34 Escribe la ecuación de una recta perpendicular a r y que pase por $(4, -3)$ en los siguientes casos:

a) $r: 2x + 7 = 0$ b) $r: -y + 4 = 0$

12.3. página 179

Los ejercicios nº 39, y desde el 43 al 49, no son de aritmética de lápiz y papel. Hay que hacer algún tipo de razonamientos para hallar la solución.

35 Estudia si las rectas r y s son paralelas o perpendiculares:

r: $3x - 5y + 15 = 0$ s: pasa por $(-2, -3)$ y $(8, 3)$.

36 Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

a) $\begin{cases} r: 2x - 5y + 3 = 0 \\ s: P(3, 1),\ Q(-2, 3) \end{cases}$ b) $\begin{cases} r: 5x - 4y + 8 = 0 \\ s: A(4, 7),\ B(0, 2) \end{cases}$

37 Halla la ecuación de la recta perpendicular a AB en su punto medio, siendo $A(-5, 3)$ y $B(2, 7)$.

38 Comprueba que el cuadrilátero de vértices $A(1, 5)$, $B(5, 1)$, $C(-4, -3)$ y $D(-8, 1)$ es un paralelogramo. Para ello, prueba que los puntos medios de sus diagonales coinciden.

39 ¿Qué puntos dividen al segmento de extremos $A(-3, 4)$ y $B(6, 1)$ en tres partes iguales?

Mira el ejercicio resuelto 2 de la página 167.

40 Halla la ecuación de estas circunferencias:

a) Centro $C(0, 0)$ y pasa por $(-3, 4)$.

b) Centro $C(1, 2)$ y pasa por $(5, 4)$.

41 Dados los puntos $A(0, 4)$ y $B(-5, 0)$, halla el punto simétrico de B respecto de A y el simétrico de A respecto de B.

42 La recta r es paralela a $5x - 4y + 3 = 0$, y la recta s es perpendicular a ellas. Ambas pasan por el punto $(1, 3)$. Escribe las ecuaciones de r y s.

Resuelve problemas

43 Los puntos $A(4, 5)$ y $B(7, 0)$ son vértices de un trapecio rectángulo que tiene dos lados sobre los ejes de coordenadas y otro lado paralelo al eje X. Dibuja el trapecio y halla:

a) Las ecuaciones de sus lados.

b) Su perímetro. c) Su área.

44 Dibuja un paralelogramo que tenga dos de sus lados sobre las rectas $y = 3x$ e $y = 0$ y un vértice en el punto $P(6, 3)$.

a) Halla las ecuaciones de los otros dos lados.

b) Di cuáles son las coordenadas de los otros vértices.

45 Halla las coordenadas del punto D, de modo que $ABCD$ sea un paralelogramo, siendo $A(1, -1)$, $B(0, 2)$ y $C(6, 5)$.

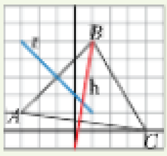
46 El segmento AB está sobre la recta $x - 4y + 10 = 0$. Su mediatriz es la recta $4x + y - 11 = 0$. ¿Cuáles serán las coordenadas de B si las de A son $(-2, 2)$? Resuélvelo de forma gráfica y analítica.

47 Ejercicio resuelto

En el triángulo de vértices $A(-3, 1)$, $B(1, 5)$ y $C(4, 0)$, hallar:

a) La ecuación de la altura h que parte del vértice B.

b) La ecuación de la mediatriz t del lado AB.



a) La altura h es perpendicular al lado AC.

Pendiente de AC: $m = -\dfrac{1}{7}$

Pendiente de h: $m' = 7$

La recta h pasa por B y su pendiente es 7.

h: $y = 5 + 7(x - 1) \to 7x - y - 2 = 0$

b) La mediatriz t es perpendicular a AB en su punto medio.

Punto medio de AB: $\left(\dfrac{-3+1}{2}, \dfrac{1+5}{2}\right) = (-1, 3)$

Pendiente de AB: $m = \dfrac{5-1}{1+3} = 1$

Pendiente de t: $m' = -1$

t: $y = 3 - 1(x + 1) \to x + y - 2 = 0$

48 Dado el triángulo de vértices $A(-5, 4)$, $B(4, 1)$, $C(-1, -2)$, halla:

a) Las ecuaciones de los tres lados.

b) El punto medio del lado AC.

c) La ecuación de la mediana del vértice B.

49 En el triángulo de vértices $A(-1, 1)$, $B(3, 4)$, y $C(3, 0)$, halla:

a) La ecuación de la mediatriz de BC.

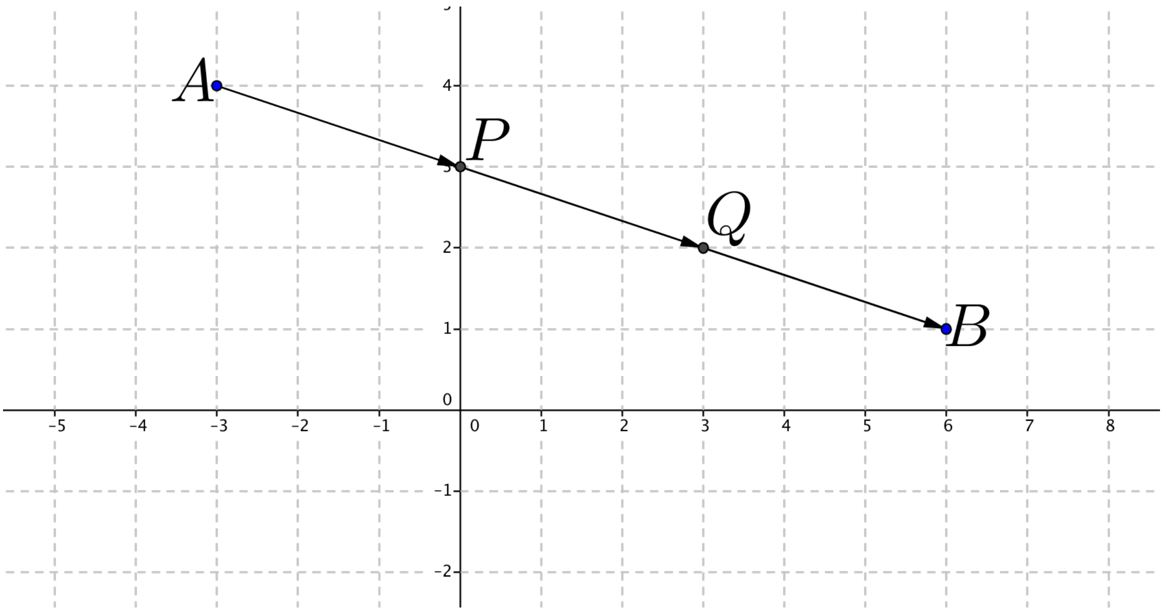
b) La ecuación de la mediatriz de AC.

c) El punto de intersección de las mediatrices (el circuncentro del triángulo).

12.3.1. Solución del ejercicio 39

39 ¿Qué puntos dividen al segmento de extremos $A(-3, 4)$ y $B(6, 1)$ en tres partes iguales?

Sean los puntos P y Q los que dividen al segmento de extremos A y B en tres partes iguales. según hemos visto los puntos R del segmento $\overline{AB}$ verifican la condición $\overrightarrow{AR} = t\overrightarrow{AB}$, siendo $t = \dfrac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AR}|}$



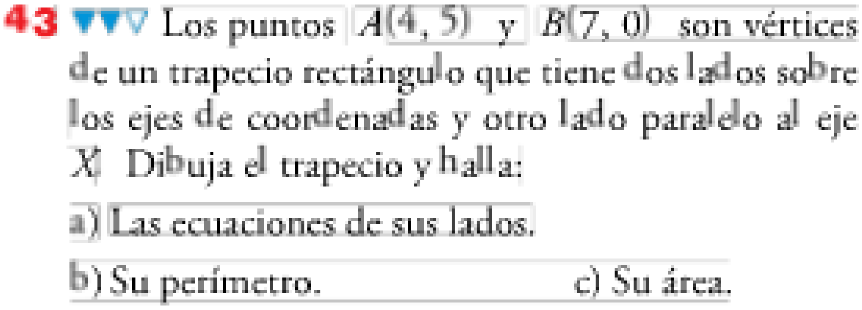
Las coordenadas de los puntos que queremos hallar son $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ y se verifica que

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow (x_1 + 3, y_1 - 4) = \frac{1}{3}(9, -3) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_1 + 3 = 3 \Rightarrow x_1 = 0 \\ y_1 - 4 = -1 \Rightarrow y_1 = 3 \end{array} \right.$$

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow (x_2 + 3, y_2 - 4) = \frac{2}{3}(9, -3) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_2 + 3 = 6 \Rightarrow x_2 = 3 \\ y_2 - 4 = -2 \Rightarrow y_2 = 2 \end{array} \right.$$

Luego $P(0, 3)$ y $Q(3, 2)$

12.3.2. Solucion ejercicio 43

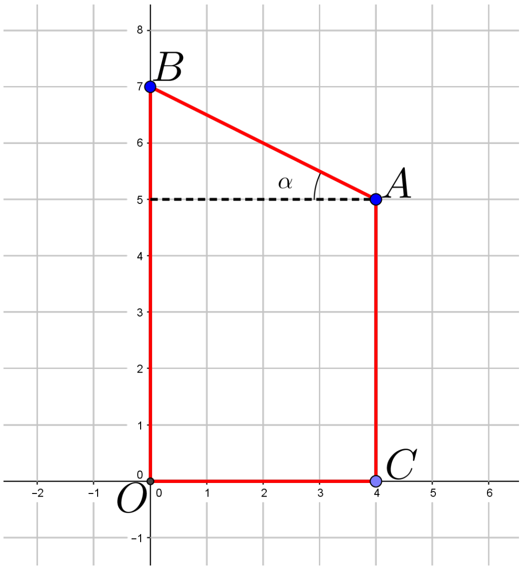


43 Los puntos $A(4, 5)$ y $B(7, 0)$ son vértices de un trapecio rectángulo que tiene dos lados sobre los ejes de coordenadas y otro lado paralelo al eje X. Dibuja el trapecio y halla:

a) Las ecuaciones de sus lados.

b) Su perímetro. c) Su área.

Hacemos la representación gráfica del trapecio rectángulo:



Ecuación del lado OB: $x = 0$, lado OC: $y = 0$, lado AC $x = 4$. Para hallar la ecuación del lado AB calculamos la pendiente de la recta AB, $\tan\alpha = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Si aplicamos la ecuación punto $(0, 7)$-pendiente $\frac{1}{2}$ resulta que el lado AB tiene de ecuación $y - 7 = \frac{1}{2}x$

El perímetro del trapecio es $|\overrightarrow{OB}| + |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{OC}| = 7 + \sqrt{2^2 + 4^2} + 5 + 4 = 16 + 2\sqrt{5}u^2$

El área del trapecio es la suma del área de un rectángulo de lados 4 y 5 unidades y del área de un triángulo rectángulo de catetos 4 y 2 unidades. Por tanto el área del trapecio será $5 \cdot 4 + \frac{4 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2}} = 24u^2$

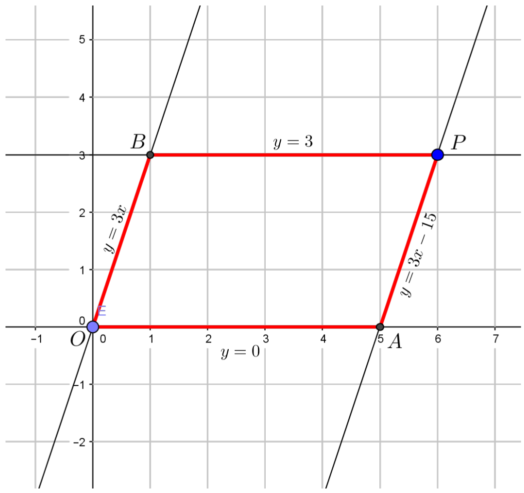
12.3.3. Solución del ejercicio 44

44 ▼▼▽ Dibuja un paralelogramo que tenga dos de sus lados sobre las rectas $y = 3x$ e $y = 0$ y un vértice en el punto $P(6, 3)$.

a) Halla las ecuaciones de los otros dos lados.

b) Di cuáles son las coordenadas de los otros vértices.

Dibujamos el paralelogramo:



La ecuación del lado AP la obtenemos trazando la paralela a OB que pasa por P, es decir punto(6,3)-pendiente($m = 3$), $y - 3 = 3(x - 6) \Rightarrow y = 3x - 15$

El punto B es la intersección de $y = 3x$ con $y = 3 \Rightarrow 3 = 3x = 1,\ y = 3)$Luego $B(1, 3)$. El punto A es la intersección de $y = 3x - 15$ con el eje de abscisas $y = 0 \Rightarrow 3x - 15 = 0 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow A(5, 0)$

12.4. página 180

Los únicos problemas que requieren de un poco de razonamiento son los nº 51 y 52

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

50 Comprueba que el triángulo de vértices $A(2, 3)$, $B(3, 1)$ y $C(-1, -1)$ es rectángulo y halla su perímetro y su área.

51 Comprueba que el triángulo de vértices $A(4, 4)$, $B(-2, 3)$ y $C(3, -2)$ es isósceles y calcula su área.

52 Prueba que el cuadrilátero de vértices $A(4, 2)$, $B(-2, 5)$, $C(-5, 2)$ y $D(-2, -4)$ es un trapecio isósceles y calcula su perímetro.

53 Halla, en cada caso, la ecuación de la circunferencia concéntrica con la dada y cuyo radio mida la mitad:

a) $x^2 + (y - 5)^2 = 36$ b) $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 12$

54 Halla la ecuación de la circunferencia de diámetro PQ, siendo $P(-5, 2)$ y $Q(3, -6)$.

55 Determina los puntos de corte de la circunferencia $x^2 + y^2 = 50$ con la bisectriz del primer cuadrante.

56 Calcula k para que el punto $(-3, k)$ pertenezca a la circunferencia $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$.

57 Dadas las rectas:

$$r: 3x + by - 12 = 0 \qquad s: ax - y + 6 = 0$$

calcula el valor de a y b sabiendo que r y s son perpendiculares y que r pasa por el punto $(9, -15/2)$.

58 Las rectas $r: x - y + 1 = 0$; $s: x + y + 9 = 0$; $t: 4x - y - 14 = 0$ forman un triángulo ABC.

a) Calcula las coordenadas de A, B y C.

b) Halla el circuncentro del triángulo.

59 Dada la recta $r: x - 2y + 1 = 0$ y el punto $A(-1, 5)$, calcula:

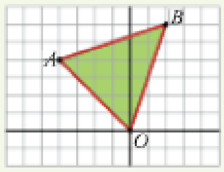
a) La ecuación de la recta s perpendicular a r y que pasa por A.

b) El punto de intersección de r y s, M.

c) El simétrico de A respecto de M.

60 Ejercicio resuelto

Describir, mediante un sistema de inecuaciones, el recinto representado.



Hallamos las ecuaciones de las rectas AO, OB y AB.

- AO es la bisectriz del 2.º cuadrante: $x + y = 0$. Tomamos un punto cualquiera, por ejemplo $(-1, 3)$, y sustituimos: $-1 + 3 = 2 > 0$. Por tanto, el semiplano buscado es $x + y \geq 0$.
- La ecuación de OB es $y = 3x \rightarrow 3x - y = 0$

  $(-1, 3) \rightarrow 3(-1) - 3 = -6 < 0$. Por tanto, tomamos $3x - y \leq 0$.
- La ecuación de AB es $x - 3y + 16 = 0$ (compruébalo).

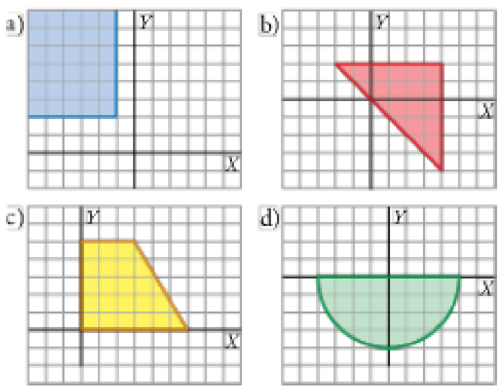
  $(-1, 3) \rightarrow -1 - 3 \cdot 3 + 16 = 10 > 0 \rightarrow$

  $\rightarrow x - 3y + 16 \geq 0$

El recinto es la solución del sistema:

$$\begin{cases} x + y \geq 0 \\ 3x - y \leq 0 \\ x - 3y + 16 \geq 0 \end{cases}$$

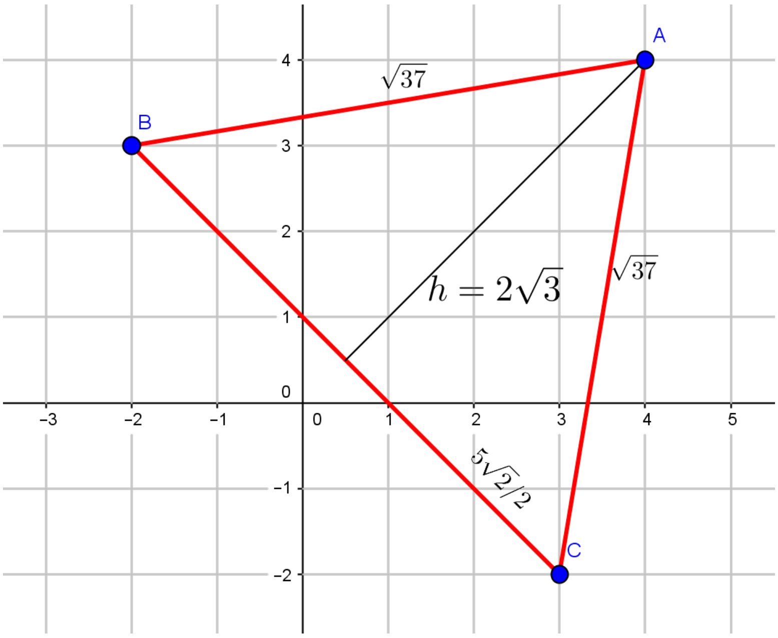
61 Describe, mediante inecuaciones o sistemas de inecuaciones, los siguientes recintos:



12.4.1. Solución al ejercico nº 51

51 Comprueba que el triángulo de vértices $A(4,4)$, $B(-2,3)$ y $C(3,-2)$ es isósceles y calcula su área.

Si representamos los puntos obtenemos la configuración siguiente:



La longitud decada uno de los lados es:

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(6^2 + 1^2} = \sqrt{37}$
$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(6^2 + 1^2} = \sqrt{37}$
$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

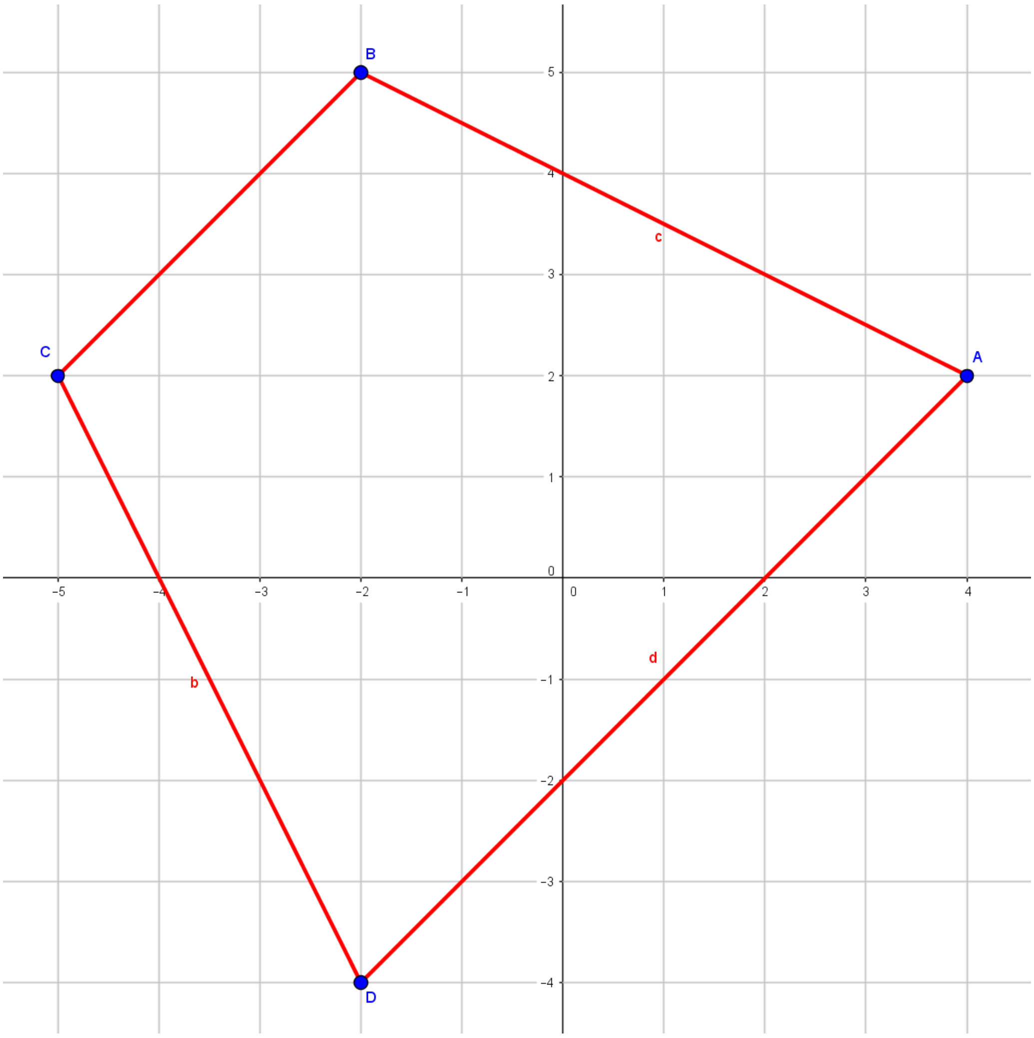
Luego se trata de un triángulo isósceles cuyos lados iguales valen $\sqrt{37}$, siendo el valor del lado desigual $5\sqrt{2}$. Si tomamos como base el lado desigual $5\sqrt{2}$, la altura vale $\sqrt{37-25} = 2\sqrt{3}$, entonces el área vale $\acute{A}rea = \dfrac{5\sqrt{2}\cdot\cancel{2}\sqrt{3}}{\cancel{2}} = 5\cdot\sqrt{6}$

Tal y como ha desarrollado el libro el tema, sabiendo la longitud de los lados podemos calcular el semiperímetro y aplicar la fórmula de Herón. Me parece un recetario que está fuera de lugar y es poco serio. Ya que en este nivel de 4º ESO no pueden justificar una fórmula (la de Herón) nop tiene sentido que se obligue al alumno a actuar como una máquina aplicando algoritmos cuyo fundamento desconoce.

12.4.2. Solución al ejercico nº 52

52 Prueba que el cuadrilátero de vértices $A(4, 2)$, $B(-2, 5)$, $C(-5, 2)$ y $D(-2, -4)$ es un trapecio isósceles y calcula su perímetro.

Si representamos los puntos obtenemos:



Hay que demostrar que la recta que pasa por A y D es paralela a la que pasa por B y C. Eso es así ya que el vector $\overrightarrow{AD} = (-6, -6)$ es proporcional al $\overrightarrow{BC} = (-3, -3)$, es decir $\overrightarrow{AD} = 2 \cdot \overrightarrow{BC}$. Además $|\overrightarrow{DB}| = |\overrightarrow{AC}| = 9$, esta es la segunda condición para que el trapecio sea isósceles. Como $|\overrightarrow{DA}| = 6 \cdot \sqrt{2}$ y $|\overrightarrow{BC}| = 3 \cdot \sqrt{2}$, el perímetro del trapecio vale $18 + 9 \cdot \sqrt{2}$

12.5. página 181

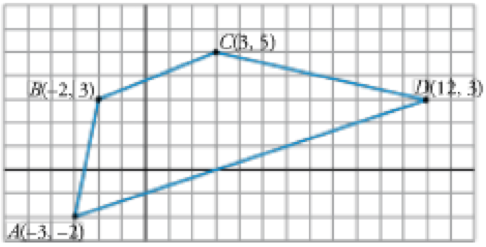
62 Representa gráficamente los siguientes recintos:

a) $\begin{cases} -1 \le x \le 4 \\ y \ge 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y \le 0 \\ x \le 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 9 \\ y \ge 0 \\ x \le 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x \le 0 \\ -5 \le y \le 0 \\ 5x - 2y \ge -10 \end{cases}$

Problemas "+"

63 Observa la figura adjunta:

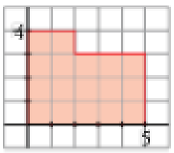


Parece un trapecio, ¿verdad? Comprueba si realmente lo es. Si no lo es, rectifica las coordenadas del punto D para que sí lo sea.

64 Halla un punto de la bisectriz del primer cuadrante que diste 5 unidades del punto (8, 7).

65 La recta $y = 2x + 1$ es la mediatriz de un segmento que tiene un extremo en el punto $A(-6, 4)$. Halla las coordenadas del otro extremo.

66 Tenemos una parcela irregular representada en unos ejes de coordenadas como indica la siguiente figura:



Queremos dividirla en dos partes de igual área mediante una recta que pase por el origen de coordenadas. ¿Cuál será la ecuación de esa recta?

Reflexiona sobre la teoría

67 De las siguientes expresiones, indica cuáles son verdaderas:

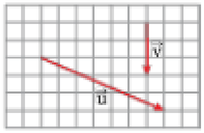
a) Dos vectores con distinta dirección no se pueden sumar.

b) Dos vectores opuestos tienen igual dirección.

c) Si $\vec{u} = k\vec{v}$ y k es negativo, entonces $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen distinta dirección.

d) Si $\vec{u} = -\vec{v}$, entonces $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen igual módulo.

68 Dibuja un vector que sumado con $\vec{u}$ nos dé el vector $\vec{v}$ y di cuáles son sus coordenadas.



69 Si dos rectas r_1 y r_2 son perpendiculares, ¿cuál de estas condiciones cumplirán sus pendientes?

a) $m_1 = \dfrac{1}{m_2}$ b) $m_1 = -m_2$

c) $m_1 \cdot m_2 = -1$ d) $m_1 + m_2 = -1$

70 Sabes que la expresión $ax + by + c = 0$ es la ecuación de una recta. Di cómo es la recta en los siguientes casos:

a) $a = 0$ b) $b = 0$ c) $c = 0$ d) $a = 0$, $c = 0$

71 ¿Cuál de las rectas

$r: y = 3x + 1$ $s: y = -\dfrac{1}{3}x$ $t: y + 3x = 0$

es perpendicular a $y = \dfrac{1}{3}x + 1$?

72 ¿Cuál de estas dos ecuaciones

$x^2 + (y + 1)^2 = \dfrac{4}{9}$ $x^2 + y^2 + 25 = 0$

representa una circunferencia? Di su centro y su radio.

73 ¿Cuál de estas expresiones nos da la distancia entre $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$?

a) $(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)$

b) $\sqrt{(x_2 + x_1)^2 - (y_2 + y_1)^2}$

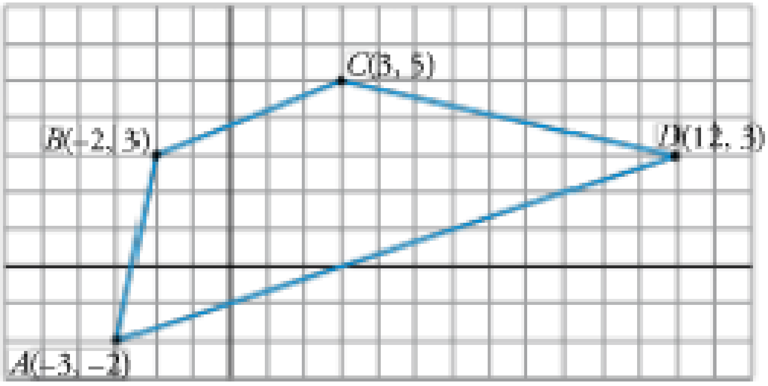
c) $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

d) $|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$

12.5.1. Solución al ejercicio 63

Damos respuesta a los ejercicios con más dificultad (según el texto problemas (+))

63 ▼▼▼ Observa la figura adjunta:



Parece un trapecio, ¿verdad? Comprueba si realmente lo es. Si no lo es, rectifica las coordenadas del punto D para que sí lo sea.

No se trata de un trapecio. Para que lo fuera la recta que pasa por los puntos A y D tendría que ser paralela a la que pasa por B y C. Para ello los vectores $\overrightarrow{AD} = (15, 5)$ y $\overrightarrow{BC} = (5, 2)$ tendrían que ser proporcionales y no lo son. Sea $D(x, y)$ y supongamos que ABCD es trapecio. Entonces $\overrightarrow{AD} = (x+3, y+2)$ ha de ser proporcional a $\overrightarrow{BC} = (5, 2)$, es decir $(x+3, y+2) = t(5, 2)$ con lo que se obtiene la igualdad $t = \dfrac{x+3}{5} = \dfrac{y+2}{2} \Rightarrow 2x + 6 = 5y + 10 \Rightarrow \boxed{y = \dfrac{2x-4}{5}}$. Esta última ecuación nos indica que la solución no es única, que hay infinitas soluciones. Por ejemplo si $x = 12 \Rightarrow y = 4$, la solución sería, en este caso, $D(12, 4)$. Si por ejemplo $x = 7 \Rightarrow y = 2$, otra posible solución sería $D = (7, 2)$

12.5.2. Solución al ejercicio 64

64 ▼▼▼ Halla un punto de la bisectriz del primer cuadrante que diste 5 unidades del punto (8, 7).

En primer lugar hay que tener muy claro qué se entiende por bisectriz de un ángulo. Es una recta que divide al ángulo en dos partes iguales, de modo que si la región angular la limitan las rectas r_1 y r_2, la distancia de cualquier punto P de la bisectriz a r_1 es igual a la distancia de P a r_2. El primer cuadrante es la región angular limitada por el eje de abscisas $(y = 0)$ y el eje de ordenadas $(x = 0)$. Si $P(x, y)$ es un punto cualquiera de la bisectriz del primer cuadrante la distancia de P al eje de abscisas es x y la distancia al eje de ordenadas es y. Por tanto $y = x$ esta es la ecuación de la bisectriz del primer cuadrante. Si $P(x, x)$ es el punto de la bisectriz del primer cuadrante que dista 5 unidades del punto $(8, 7)$ entonces $\sqrt{(x-8)^2 + (x-7)^2} = 5 \Rightarrow 2x^2 - 30x + 113 = 25 \Rightarrow 2x^2 - 30x + 88 = 0 \Rightarrow x^2 - 15x + 44 = 0$. La solución de esta ecuación viene dada por $x = \dfrac{15 \pm \sqrt{225 - 176}}{2} = \dfrac{15 \pm 7}{2}$, es decir $x = 11$ o bien $x = 4$. Los puntos pedidos son $(4, 4)$, $(11, 11)$

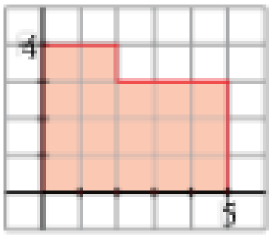
12.5.3. Solución al ejercicio 65

65 ▼▼▼ La recta $y = 2x + 1$ es la mediatriz de un segmento que tiene un extremo en el punto $A(-6, 4)$. Halla las coordenadas del otro extremo.

La mediatriz de un segmento es la perpendicular a este que pasa por su punto medio. La pendiente de la recta que determina el segmento, que pasa por A, es $-\dfrac{1}{2}$, por tanto su ecuación será $y = -\dfrac{1}{2}x + n$. como esta recta pasa por $A(-6, 4) \Rightarrow 4 = 3 + n \Rightarrow n = 1$. El punto medio del segmento será la intersección de las dos rectas que la podemos obtener igualando sus ecuaciones $2x + 1 = -\dfrac{1}{2}x + 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 1$. El punto medio del segmento es $M(0, 1)$. Si $B(a, b)$ es el otro punto del segmento, al ser M el punto medio del segmento AB se verifica $\left(\dfrac{a-6}{2}, \dfrac{b+4}{2}\right) = (0, 1) \Rightarrow a = 6$ y $b = -2$ Las coordenadas del otro punto del segmento son $(6, -2)$

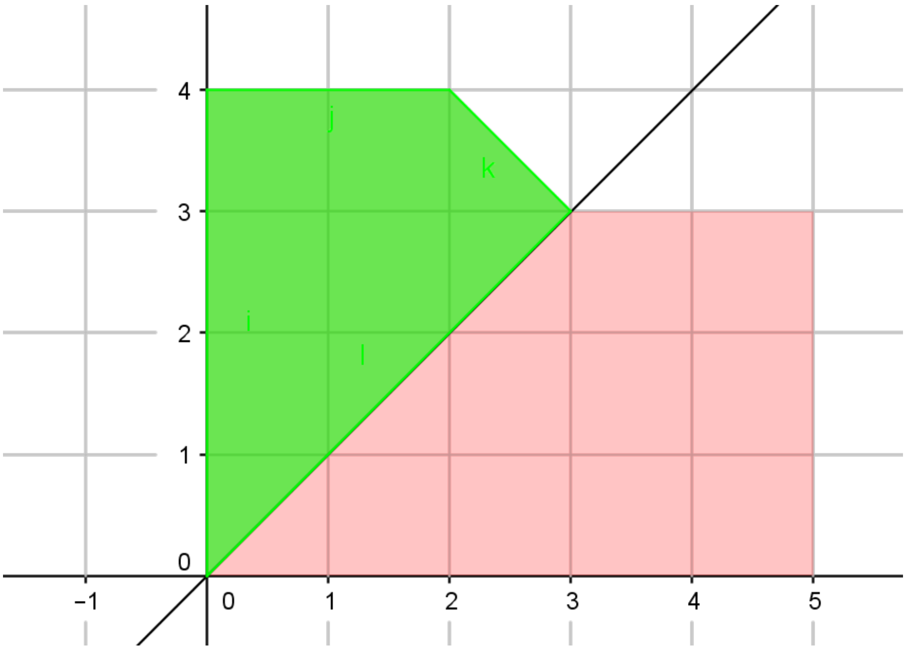
12.5.4. Solución al ejercicio 66

66 ▼▼▼ Tenemos una parcela irregular representada en unos ejes de coordenadas como indica la siguiente figura:

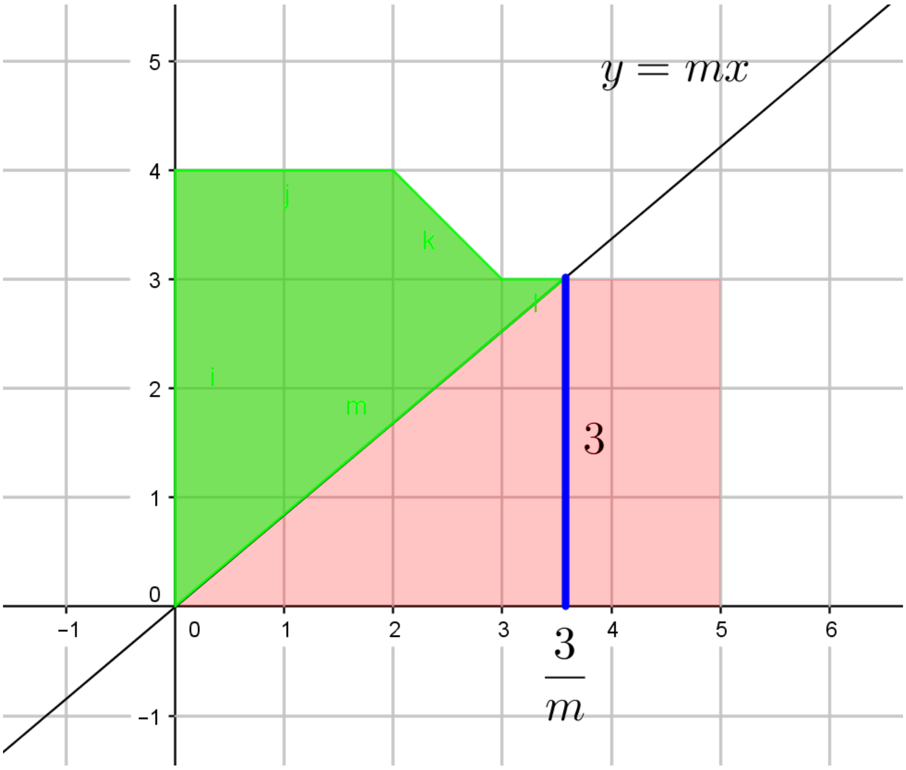


Queremos dividirla en dos partes de igual área mediante una recta que pase por el origen de coordenadas. ¿Cuál será la ecuación de esa recta?

En primer lugar vamos a tantear. Sabemos que el área total de la figura sombreada (rojo + verde) es $\dfrac{35}{2}$ unidades cuadradas.



La parte sombreada en verde tiene una superficie de 7 unidades cuadradas (se pueden contar cuadritos/medios cuadritos o emplear cualquier método elemental de partición para calcularla). Esto nos indica que la recta que pasa por el origen y divide la figura en dos partes con la misma superficie, que será de la forma $y = mx$, tendrá una pendiente $m < 1$. La siguiente figura representa la situación:



La intersección de la recta $y0mx$ con $y = 3$ es el punto $(\frac{3}{m},3)$. La figura sombreada en rosa es un trapecio cuyas bases miden 5 y $5 - \frac{3}{m}$, siendo su altura 3. La superficie de este trapecio viene dada por la expresión $\frac{3}{2} \cdot (10 - 3m) = \frac{35}{4}$ ya que es la mitad del área de toda la figura. Operando y despejando m obtenemos el valor $\frac{18}{25}$. Luego la recta que nos piden es $y = \frac{18}{25}x$

12.6. Autoevaluación

En la autoevaluación no hay ningún ejercicio que requiera razonamiento, son repeticiones de los que se le han ido apareciendo a lo largo del desarrollo del tema.

Autoevaluación

WWW 7. Soluciones de la autoevaluación.

¿Sabes hallar el punto medio de un segmento y el simétrico de un punto respecto de otro? ¿Y comprobar si tres puntos están alineados?

1 Representa los puntos $A(-5, 0)$, $B(0, 2)$, $C(3, 7)$ y $D(-2, 5)$ y comprueba analíticamente que el punto medio de AC coincide con el punto medio de BD.

2 Halla el simétrico de $P(-7, -15)$ respecto de $M(2, 0)$.

3 Halla el valor de k para que los puntos $A(1, -5)$, $B(3, 0)$ y $C(6, k)$ estén alineados.

¿Sabes calcular la distancia entre dos puntos? ¿Y aplicarla para hallar la ecuación de una circunferencia?

4 Calcula la longitud de los lados del triángulo de vértices $A(-4, 1)$, $B(6, 3)$ y $C(-2, -3)$.

5 Escribe la ecuación de la circunferencia de centro $(0, -3)$ y radio 5.

¿Obtienes con soltura la ecuación de una recta dada de diferentes formas?

6 Obtén la ecuación de las rectas r y s tales que:

r pasa por $(-3, 2)$ y es perpendicular a $8x - 3y + 6 = 0$.

s pasa por $(9, -5/2)$ y es paralela a $2x + y - 7 = 0$.

7 En el triángulo de vértices $A(-2, 2)$, $B(0, 7)$ y $C(6, 4)$, halla la ecuación de la mediana que parte de B.

¿Reconoces, sin representarlas, si dos rectas son paralelas o perpendiculares?

8 Estudia la posición relativa de estas rectas:

$$r: 2x + y - 2 = 0 \qquad s: x + \frac{1}{2}y = 1$$

¿Obtienes con agilidad el punto de corte de dos rectas?

9 Halla el punto de intersección de las siguientes rectas:

$$3x + 8y - 7 = 0 \quad \text{y} \quad 4x + 2y - 31 = 0$$