La enseñanza algorítmica Dominio erróneo de una función

Miguel Galo Fernández

1. Dominio de una función

Cuando definimos buscamos que el objeto de la definición no pueda confundirse con otros, definir es identificar de manera inequívoca. Cuando no se define lo que es el dominio de una función se está confundiendo al alumno. No hay que empecinarse pensando que con la repetición de ejercicios hasta la saciedad se va a captar el concepto. Nada más lejos de la realidad. Se pueden hacer de manera algorítmica (sin razonamiento lógico-matemático) cientos de ejercicios de dominio de definición y no saber lo que significa. En el libro de texto de Anaya Matemáticas 4º ESO opción B, se lee la siguiente definición: se llama dominio de definición de una función f, y se designa por Dom f, al conjunto de valores de x para los cuales existe la función $f(x)$. Después el texto muestra un montón de ejercicios en donde se pone de manifiesto, subrepticiamente, que el cálculo del dominio se hace excluyendo los casos en los que el denominador es cero y excluyendo también el caso en el que el radicando de una raíz cuadrada sea negativo. Voy a ir desmontando esta falacia poco a poco, desde sus orígenes. ¿Qué es una función entre dos conjuntos de números reales A y B? Pues es un criterio que permite asociar elementos de A con elementos de B, pero esta asociación o correspondencia ha de estar sujeta a la condición de que a todo elemento de A se le haga corresponder uno y solo un elemento de B. Por ejemplo la correspondencia que representa la figura 1 no es aplicación ya que el punto G no tiene correspondiente y el punto D tiene dos correspondientes . El diagrama de Venn que muestra la figura 2 es una aplicación. Si $f : A \longmapsto B$ es una función entre los conjuntos A y B , todo número x del conjunto A tiene un correspondiente $y = f(x)$ en el conjunto B. Si no existiera ese elemento $y = f(x)$, el elemento x no tendría correspondiente (A no sería dominio de la función f), estaríamos en la situción de la figura 1 y f no sería función. Precisamente lo que pretendemos con el dominio es hacerlo coincidir con el conjunto A para evitar esta situación.

El término existir $f(x)$ no está del todo claro en el contexto que lo hemos utilizado. En el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales hay operaciones prohibidas que no se pueden realizar como son dividir por cero y extraer raíces de índice par de números negativos. Por ejemplo en los números reales no se puede efectuar la operación $\sqrt{-2}$ y a esto nos referimos cuando decimos que no existe $y = f(-2)$ si se trata de la función $f(x) = \sqrt{x}$. La mayoría de los alumnos a los que he ido preguntando a lo largo del tiempo no sabían dar una explicación del porqué no se puede realizar la operación $\sqrt{-2}$ en el conjunto de los números reales, no supieron responderme. El panorama es demoledor, cuando no se sabe responder a una cuestión tan sencilla y elemental urge revisarlo todo, algo no estamos haciendo bien.

El término no existe no es muy afortunado porque $\sqrt{-2}$ sí se puede calcular, sí existe, en otro conjunto numérico más amplio que contiene a los reales: el conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos (se comienza a estudiar en bachiller). Los campos numéricos no están en la naturaleza, son invenciones del hombre

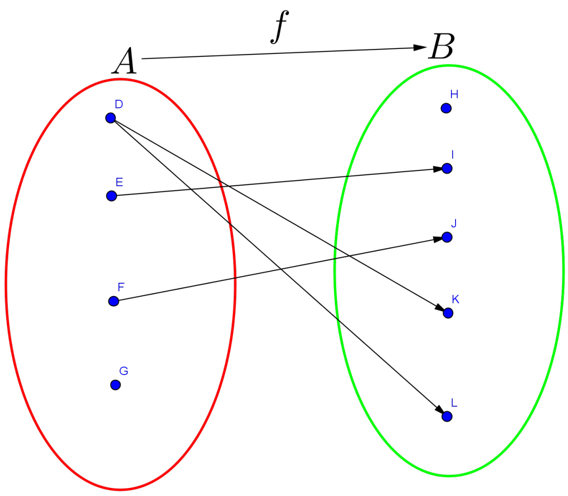


Figura 1: Esta relación no es función

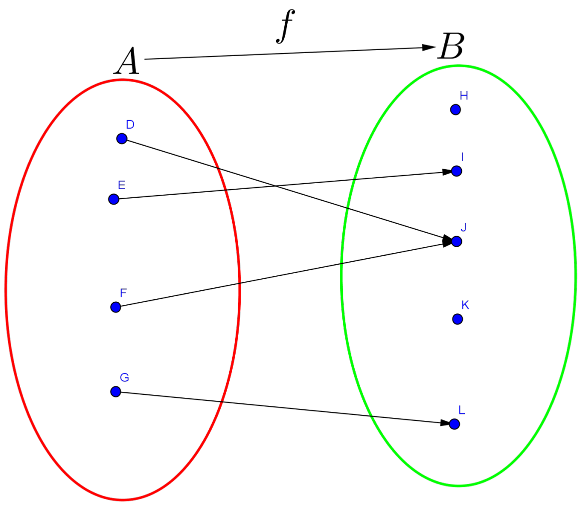


Figura 2: Esta relación es función

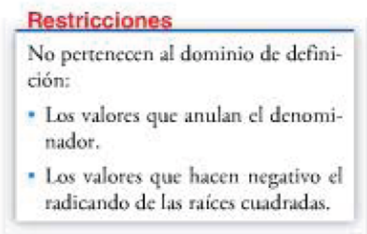
Por cierto hay una operación muy curiosa en los números reales, dividir 0 entre 0. en los mismos términos que hemos mencionado, ¿existe el valor $\frac{0}{0}$? ¿Cúal de estas operaciones es correcta?

$$\begin{array}{r|l} 0 & 0 \\ \cline{2-2} 0 & 8 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 0 & 0 \\ \cline{2-2} 0 & -12 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 0 & 0 \\ \cline{2-2} 0 & 548 \end{array}$$

Cuadro 1: Una operación indeterminada

Las tres son correctas (además con resto cero), lo que nos indica que la operación $\frac{0}{0}$ es indeterminada, no sabemos su valor pero eso no quiere decir que no exista.

Seguimos con el concepto de dominio que nos proporciona el libro de texto Anaya. Si atendemos las indicaciones que nos da el texto para calcular dominios que están en la página 88 y que son estas:



Restricciones

No pertenecen al dominio de definición:

- Los valores que anulan el denominador.
- Los valores que hacen negativo el radicando de las raíces cuadradas.

Figura 3: Falaz recomendación

Tratemos de hallar el dominio de la función $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-4x+3}$. Seguimos las recomendaciones del texto hemos de averiguar en donde se anula el denominador, es decir $x^2-4x+3=0 \Rightarrow x=\dfrac{4\pm\sqrt{16-12}}{2} \Rightarrow x=1,\ x=3$.Según el texto, el dominio de esta función debiera ser $Domf = \mathbb{R}-\{1,3\} = (-\infty,1)\cup(1,3)\cup(3,+\infty)$ Si todo ha ido bien, no deben existir (en el sentido del libro de texto) $f(3)$ *ni* $f(1)$. Y en efecto, no podemos calcular $f(3)$ ya que $f(3)=\dfrac{1}{0}$, no se puede dividir por cero en el conjunto de los números reales. Veamos que pasa con $f(1)=\dfrac{0}{0}$. No podemos decir que no exista $f(1)$ de momento tan solo afirmamos que ese valor es indeterminado. Si descomponemos en factores el polinomio del denominador obtenemos la fracción algebraica que nos da la expresión $f(x)=\dfrac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x-3)}=\dfrac{1}{x-3}$, esta es la expresión simplificada de nuestra función. Ahora sí podemos calcular $f(1)=-\dfrac{1}{2}$. El dominio de la función **<u>no es</u>** $domf=\mathbb{R}-\{1,3\}$, esto es falso, el dominio es $domf=\mathbb{R}-\{3\}=(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$. Queda claro lo mal que explica el texto el dominio de definición. Si mala es la receta que da el libro de texto para hallar dominios de fracciones algebraicas, peor es la que da para hallar los dominios en funciones irracionales . Utiliza un resultado para resolver inecuaciones que no pueden asimilar la mayoría de los alumnos por no decir la totalidad. Se basa en los siguientes resultados:

Definición 1 *se dice que $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$ son las raíces separadas del polinomio P(x) si se verifica que $P(x_i)=0\ \ \forall\ i\in\{1,2,...n\}$ y además $\nexists\ x,\ x_i<x<x_{i+1}$ que verifique $f(x)=0$, $\nexists$ significa no existe.*

Teorema 1 *Sean $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$ las raíces separadas del polinomio P(x) que suponemos ordenadas en sentido creciente. Entonces el signo de f(x) no varía $\forall\ x\in(x_i,x_i)$, $i=1,2,3,...,n$, $\forall x\in(-\infty,x_1)$, $\forall x\in(x_n,+\infty)$ ($\forall$ significa para todo y $\in$ significa pertenece)*

El resultado del teorema 1, impuesto como dogma de fe, se emplea para hallar dominios. Co este método el alumno no sabe lo que está haciendo. Con el tiempo, al dejar de utilizarlo, se olvidará del algoritmo y el esfuerzo hecho para manejar el cálculo de dominios resulta estéril. El libro de texto Anaya de Matemáticas 4º ESO opción B, propone el siguiente ejemplo , hallar el dominio de la función $y=\sqrt{3x^2+6x-9}$ (página 94). Sin mencionarlo, el autor del texto separa, en primer lugar, las raíces de la función $3x^2 + 6x - 9$, esta funcion tiene dos raices separadas que son $x_1 = 1,\ x_2 = -3$. Tal y como indica el teorema 1 las dos raíces mencionadas dividen a la recta real en tres intervalos según enuncia el teorema, que son $(-\infty, -3)$, $(-3, 1)$ y $(1, +\infty)$ representados en la figura siguiente:

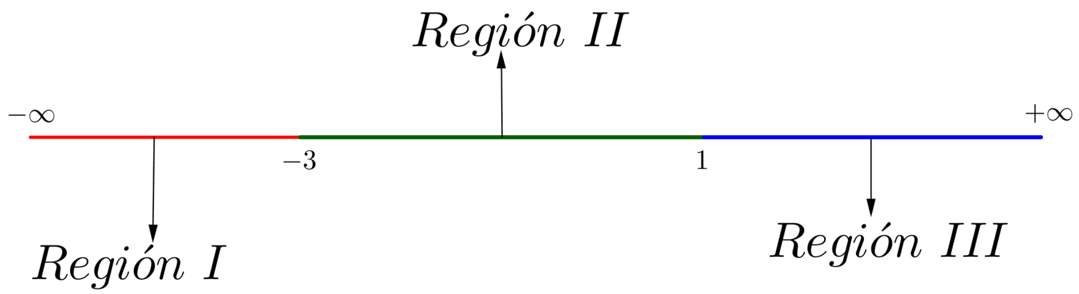


Figura 4: Separacion de raices

Como en las regiones I, II y III la función $y = 3x^2 + 6x - 9$ mantiene el signo, bastará con dar un valor, el que sea, en cada uno de estos intervalos para saber el signo de la función. Así que el signo de la función en la Región I es positivo ya que $y_4 = 3\cdot(-4)^2+6\cdot(-4)-9 = 13 > 0$. En la Región II el signo es negativo ya que $y_o = -9$ y en la Región III la función es positiva $y_2 = 3 \cdot 2^2 + 6 \cdot (2) - 9 = 15 > 0$. Con todo lo expuesto resulta que el dominio de la función $Dom(3x^2+6x-9) = (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$. Exponer de este modo las matemáticas a principiantes no está bien, los que lo hacen no son conscientes del daño que producen en los alumnos a los que impiden adquirir conocimientos. Para justificar el Teorema 1 y saber lo que se está haciendo se necesita tener conocimientos, cuanto menos rudimentarios, de cálculo infinitesimal (actualmente se llama análisis. matemático). Entonces, ¿cómo se puede exponer, en 4º de ESO, el cálculo de este dominio? En primer lugar habría que enseñar a resolver inecuaciones huyendo de los recetarios, ¡hay que destruir los recetarios en las matemáticas! Yo haría lo siguiente:

Definición 2 *(Relación de orden en $\mathbb{R}$) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ dos números reales. Se dice que a es menor o igual que b y se escribe $a \leq b$, si se verifica que $a - b \leq 0$*

Proposición 1 $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *se verifica:*

1. $a \leq a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

2. Si $a \leq b$ *y* $b \leq c \Rightarrow a \leq c$

3. Si $a \leq b$ *y* $c \leq d \Rightarrow a + c \leq b + d$

4. Si $a \leq b$ *y* $c \geq o \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$

5. Si $a \leq b$ *y* $c \leq o \Rightarrow b \cdot c \leq a \cdot c$

Demostración

1. esta propiedad se desprende fácilmente de que $a - a \leq 0$

2. Si $a \leq b \Rightarrow a - b \leq 0$ y del mismo modo si $b \leq c \Rightarrow b - c \leq 0$ Como al sumar dos números negativos obtenemos un número negativo $a - \cancel{b} + \cancel{b} - c = a - c \leq 0 \Leftrightarrow a \leq c$

3. Si $a \leq b$ y $c \leq d$ se verifica $a - b \leq 0$ y también $c - d \leq 0$. Al sumar dos números negativos obtenemos un número negativo, es decir $a - b + c - d = a + c - (b + d) \leq 0$ y esto es equivalente, por definición, a que $a + c \leq b + d$

4. Si $a \leq b \Rightarrow a - b \leq 0$, como $c \geq 0$ si aplicamos la regla de los signos - X $+ = -$ obtenemos $c(a - b) = ac - bc \leq 0 \Rightarrow ac \leq bc$

5. Si $a \leq b \Rightarrow a - b \leq 0$, como $c \leq 0$ si aplicamos la regla de los signos - X - $= +$ obtenemos $c(a - b) = ac - bc \geq 0 \Rightarrow bc \leq ac$

Vamos a emprender el cálculo del dominio de la función $y = \sqrt{3x^2 + 6x - 9}$ de otra manera, de forma que el alumno sepa en cada momento lo que esta haciendo porque tiene las bases de conocimiento adecuadas para hacerlo. Esta claro que el dominio estara formado por el conjunto de valores x para los cuales es $3x^2 + 6x - 9 \geq 0$. Para ello vamos a descomponer en factores el polinomio del que conocemos que sus raíces son $x_1 = 1,\ x_2 = -3$ que hemos calculado anteriormente. Se tiene que $3x^2 + 6x - 9 = 3(x - 1)(x + 3)$. Para que esta expresión sea positiva se pueden dar dos casos : los dos factores de la descomposición del polinomio $y = \sqrt{3x^2 + 6x - 9}$ son negativos (- x - $= +$) o los dos factores son positivos ($+$ x $+ = +$)

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 1 \leq 0 \Rightarrow x \leq 1 \\ \qquad \text{y además} \qquad\qquad \Rightarrow x \leq -3 \\ x + 3 \leq 0 \Rightarrow x \leq -3 \end{array} \right.$$

O bien se verifica

$$\left\{\begin{array}{c} x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \\ \text{y además} \\ x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3 \end{array}\right. \Rightarrow x \geq 1$$

Obtenemos pues que el dominio de la función es para valores de x mayores o iguales que 1 y menores o iguales que -3, esto en forma de intervalo se expresa como $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$.

Viendo como desarrolla el texto el cálculo de dominios de funciones , el alumno no adquiere conocimiento siguiendo el texto si acaso alguno pasajera destreza algorítmica en el mejor de los casos.