Una francción muy curiosa

(to Salvador Fructuoso Piqueras from Miguel Galo Fernández)

Hallar el valor de los dígitos a,b,c,d,e,f,g sabiendo que $\dfrac{aba}{cdc} = 0'\widehat{defg}$

En lo que sigue, Salvador, he demostrado que este problema que planteas no tiene solución. Me he vuelto loco suponiendo que sí la tenía. Otra cosa, me parece que me decías por teléfono que habías logrado demostrar que $9{\cdot}aba = cdc{\cdot}defg$, esto es falso, habrás querido decir que $9999{\cdot}aba = cdc{\cdot}defg$.

Solución:

Sea $x = 0'\widehat{defg}$. Entonces : $10000x = defg'\widehat{defg}$, y si restamos estas dos expresiones tenemos que: $10000x - x = 9999x = defg$, los decimales en las dos expresiones son exactamente iguales, de eso no hay duda, por eso el número $9999x$ no tiene decimales. Luego $9999x = defg \Rightarrow x = \dfrac{defg}{9999}$. Por tanto tenemos la expresión $\dfrac{aba}{cdc} = \dfrac{defg}{9999}$. El número defg es mayor que aba por tanto hemos pasado de la fracción $\dfrac{defg}{9999}$ a la fracción $\dfrac{aba}{cdc}$ por simplificación, lo cual nos indica que el número de tres cifras cdc es un divisor de 999. La descomposición factorial de 9999 es $9999 = 3^2 \cdot 11 \cdot 101$. Luego el valor del número cdc es $cdc = 101$ o bien $cdc = 303$ o bien $cdc = 909$ (los únicos divisores de 3 cifras de 9999 son 101, 303 y 909)). En cualquiera de los casos se tiene que d=0, obteniendo entonces que la expresión anterior se convierte en : $x = \dfrac{efg}{9999} = \dfrac{aba}{c0c}$. Pero esta expresión es equivalente a la igualdad $efg \cdot c0c = 9999 \cdot aba$. El número $efg \cdot c0c$ tiene 6 cifras mientas que el número $9999 \cdot aba$ tiene siete cifras lo cual es una contradicción ya que han de ser iguales. Concluimos diciendo que este problema **no tiene solución**