1. Evitar los recetarios al explicar la factorización de polinomios

Cuando se enseña con algoritmos, en los que se evita el razonamiento, se empobrece la creatividad reduciendo las posibilidades de solución en los problemas. Vamos a una velocidad vertiginosa al programar los contenidos en matemáticas de 4^{o} de ESO, por ejemplo. Se pretende abarcar mucho y muy deprisa. Los alumnos no aprenden, estudian de memoria algoritmos que con mas o menos destreza aplican a un ejercicio. A la semana del examen la memoria selectiva hace que desaparezcan los vestigios de esos algoritmos que ya no se utilizan y el alumno se queda a cero.

Si lo que se requiere es la solución de un ejercicio, sin aplicar razonamiento alguno, como se expone en el libro de texto Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas de la Editorial Anaya, sería más eficiente utilizar software que da la solución a un determinado ejercicio de forma más precisa y eficiente que con lapiz y papel. Un software matemático con licencia copyleft, de libre circulación, es GeoGebra. Lo desarrolló el austriaco Markus Hohenwater en la universidad de Salzburgo aunque actualmente el proyecto se desarrolla en la universidad de Linz. Si quisiéramos factorizar con lápiz y papel el polinomio $x^3 - 5x^2 + 7x - 3$ siguiendo las recetas del libro de texto mencionado tardaríamos mucho más tiempo que con GeoGebra, con el riesgo de equivocarnos en los cálculos. Para comprobar la evidencia de lo que decimos clicar aquí. El programa, una vez que en la ventana en blanco tecleamos el comando Factoriza$[x^3-5x^2+7x-3]$, nos devuelve la solución analítica $(x-3)(x-1)^2$ y la solución gráfica (puntos de corte de la función $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$ con el eje de abcisas). No hay razonamientos ni usando lapiz y papel con el recetario del libro de texto, ni con GeoGebra. Si hay que elegir, es preferible la solución con el software. ¿Se puede explicar la factorización de polinomios de forma razonada?. Mi respuesta es que sí, a continuación voy a dar un desarrollo teórico que justificará todo lo que se hace y desde este momento, no será descerebrado utilizar GeoGebra para resolver un ejercicio ya que sabremos lo que estamos haciendo. No he depurado ni la exposición ni la redacción de mi propuesta de explicación, ha ido de la idea al editor LaTeX directamente. Lo he hecho de esta manera ya que tan solo pretendo constatar que los razonamientos teóricos no son tan difíciles, que los alumnos de 15-16 años son capaces de hacerlos y que merece la pena.

2. Divisibilidad de polinomios

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios tales que grado de $P(x) \geq$ grado $Q(x)$. Se dice que $Q(x)$ es divisor de $P(x)$, o bien que $Q(x)$ divide a $P(x)$ o bien que $P(x)$ es múltiplo de $Q(x)$ si existe un tercer polinomio $C(x)$ tal que $P(x) = C(x) \cdot Q(x)$. Esta definición es equivalente a decir que $Q(x)$ divide a $P(x)$ si el resto de la división de $P(x)$ entre $Q(x)$ es cero :

$$\begin{array}{l|l} \mathrm{P(x)} & \mathrm{Q(x)} \\ \cline{2-2} \mathrm{R(x)} & \mathrm{C(x)} \end{array}$$

Según el algoritmo de la división $P(x) = C(x) \cdot Q(x) + R(x)$ y si se verifica que $R(x) = 0$ entonces $P(x) = C(x) \cdot Q(x)$. Recordemos que el grado del polinomio producto $C(x) \cdot Q(x)$ es igual a grado $C(x)+$ grado $Q(x)$ y la suma de estos grados han de coincidir con el grado de $P(x)$ por lo que grado $C(x) =$ grado $P(x)-$ grado $Q(x)$.

Tiene una particular importancia la división de un polinomio $P(x)$ por polinomios de la forma $x-a$. Ya sabemos que este tipo de divisiones se pueden efectuar, entre diversos algoritmos, por el algoritmo que nos brinda la regla de Ruffini pero en este desarrollo eso carece de importancia. Si dividimos $P(x)$ por $x-a$ obteniendo un cociente $g(x)$ y un resto r (que será un número ya que grado r $<$ $grado\ x-a=1 \Rightarrow$ $grado\ r=0$), se verifica que $P(x)=g(x)\cdot(x-a)+r$

$$\begin{array}{r|l} P(x) & x-a \\ \cline{2-2} r & g(x) \end{array}$$

Teorema 1 *(**Teorema del resto**) El resto al dividir un polinomio $P(x)$ por $x-a$ es igual al valor numérico del polinomio en $x=a$, es decir $r=P(a)$*

Demostración

Según el algoritmo de la división $P(x)=g(x)\cdot(x-a)+r$ y si damos el valor $x=a$ nos queda $P(a)=g(a)\cdot(a-a)+r \Rightarrow P(a)=r$

3. Raíz de un polinomio

Sea $P(x)$ un polinomio. Se dice que $x=a$ es una raíz o cero de este polinomio si $P(a)=0$

Del teorema del resto se desprende que es lo mismo decir que $x=a$ es una raíz del polinomio $P(x)$ que decir que $P(x)$ es divisible por $x-a$. El siguiente teorema nos facilita la búsqueda de posibles raíces enteras de un polinomio (si empleamos la Regla de Ruffini para hallarlas por ejemplo).

Teorema 2 *Sea $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$. Entonces si $x=a$ es raiz de $P(x)$ a es un divisor de a_0*

Demostración

Se tiene que $P(a)=a_na^n+a_{n-1}a^{n-1}+\cdots+a_1a+a_0=0 \Rightarrow a(a_na^{n-1}+a_{n-1}a^{n-2}+\cdots+a_1)= =-a_0 \Rightarrow a_na^{n-1}+a_{n-1}a^{n-2}+\cdots+a_1=-\dfrac{a_0}{a}$, con lo que queda demostrado que a es divisor de a_0

Teorema 3 *Sea $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$. Sea la fracción irreducible $\dfrac{a}{b}$. Entonces si $x=\dfrac{a}{b}$ es raiz racional de $P(x)$, a es un divisor de a_0 y b es divisor de a_n*

Demostración

*Vamos a emplear el siguiente resultado: si un entero c divide al producto ab y no divide al número b entonces c divide al valor a. Se tiene que $P\left(\dfrac{a}{b}\right)=0 \Rightarrow a_n\dfrac{a^n}{b^n}+a_{n-1}\dfrac{a^{n-1}}{b^{n-1}}+\cdots+a_1\dfrac{a}{b}+ a_0=0$. Si multiplicamos por b^n obtenemos $a_na^n+a_{n-1}a^{n-1}b+\cdots+a_1ab^{n-1}+a_0b^n=0$. Si dividimos por a y trasponemos el término a_0b^n se tiene que $a\left(a_na^{n-1}+a_{n-1}a^{n-2}b+\cdots+a_1b^{n-1}\right)= =-a_0b^n \Rightarrow a_na^{n-1}+a_{n-1}a^{n-2}b+\cdots+a_1b^{n-1}=\dfrac{a_0\cdot b^n}{a}$ y como **a** no divide a b^n tendrá que dividir a a_0. Sea $k=-\dfrac{a_o}{a}$. Entonces podemos poner $a_na^{n-1}+a_{n-1}a^{n-2}b+\cdots+a_1b^{n-1}=k^n$.*

Si dividimos toda la expresión por b, $\dfrac{a_n a^{n-1}}{b} + a_{n-1}a^{n-2} + \cdots + a_1 b^{n-2} = k \cdot b^{n-1}$. *Como **b** no divide a* a^{n-1}*, b tendrá que dividir a* a_n

3.1. Raíces múltiples de un polinomio

La multiplicidad de la raiz de un polinomio es el número de veces que se repite la raíz, no podemos dar a este nivel una definición más precisa. Por ejemplo, hallamos las raíces del polinomio $x^6 - 4x^5 - 10x^4 + 24x^3 + 13x^2 - 44x + 20$ *por medio de la regla de Ruffini:*

	1	-4	-10	24	13	-44	20
1		1	-3	-13	11	24	-20
	1	-3	-13	11	24	-20	0
1		1	-2	-15	-4	20	
	1	-2	-15	-4	20	0	
1		1	-1	-16	-20		
	1	-1	-16	-20	0		
-2		-2	6	20			
	1	-3	-10	0			
-2		-2	10				
	1	-5	0				
5		5					
	1	0					

La raíz $x = 1$ *aparece tres veces en el algoritmo de Ruffini por lo que se trata de una raíz triple,* $x = -2$ *aparece dos veces, es una raíz doble y* $x = 5$ *aparece una sola vez, es una raíz simple. El polinomio se descompone en factores como* $x^6 - 4x^5 - 10x^4 + 24x^3 + 13x^2 - 44x + 20 =$ $= (x-1)^3(x+2)^2(x-5)$. *La descomposición factorial de un polinomio* $P(x)$ *que tuviese en* $x = 3$ *una raíz quíntuple, en* $x = -7$ *una raíz de multiplicidad 4, en* $x = 4$ *una raíz triple, en* $x = 12$ *una raíz doble y en* $x = -5$ *una raíz simple sería* $P(x) = (x-3)^5(x+7)^4(x-4)^3(x-12)^2(x+5)$

Si hallamos las raíces por medio de la fórmula de Baskhara ocurre lo mismo. Por ejemplo $x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36-36}}{2} = 3 \pm 0$. *Las dos raíces son* $x_1 = 3 + 0 = 3$, $x_2 = 3 - 0 = 3$, $x = 3$ *es una raíz doble por lo que la factorización del polinomio es* $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$.

Teorema 4 *(Teorema del factor)* $x = a$ *es raíz del polinomio* $P(x)$ *si y solo si* $x - a$ *es divisor de* $P(x)$

Demostración

Cuando en matemáticas se escribe un si y solo si nos referimos a una equivalencia lógica, es decir, que si $x = a$ *es raíz de* $P(x)$ *entonces* $x - a$ *es divisor de* $P(x)$ *y viceversa, si* $x - a$ *es divisor de* $P(x)$ *entonces* $x = a$ *es raíz de* $P(x)$. *Esto es consecuencia del teorema del resto, si* $x = a$ *es raíz de* $P(x)$ *el resto al dividir* $P(x)$ *entre* $(x - a)$ *es* $r = P(a) = 0$*, si el resto es cero* $x - a$ *es divisor de* $P(x)$.

Teorema 5 *(Teorema fundamental del álgebra) Todo polinomio de grado n* $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, *tiene a lo sumo n raíces reales (recordemos que alguna de estas raíces pueden estar repetidas debido a su multiplicidad)*

Demostración

Si las raíces del polinomio fueran $a_1, a_2, \cdots, a_m,\ m > n$ *entonces el polinomio podría expresarse como* $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_m)$ *(ver la sección siguiente de factorización de polinomios). En este caso el grado del polinomio sería* $m > n$ *lo cual es una contradición. Luego el número de raíces del polinomio ha de ser menor o igual que n.*

4. Factorización de polinomios

Factorizar es expresar mediante factores, factor es equivalente a producto. La foctorización de un polinomio consiste en expresarlo como producto de polinomios que necesariamente han de tener menor grado que este.

Por ejemplo el polinomio $P(x) = x^6 + 3x^5 - 27x^4 + 17x^3 + 66x^2 - 36x - 56$ *se puede expresar como* $P(x) = (x^2 + 2x + 1)(x^4 + x^3 - 30x^2 + 76x - 56)$ *o también podríamos poner que* $P(x) = (x^3-6x^2+12x-8)(x^3+9x^2+15x+7)$. *Las expresiones anteriores son formas de factorizar el polinomio, ¿cuál es la mejor forma de factorizar el polinomio? La mejor factorización del polinomio es aquella en la que el grado de los polinomios producto es el menor posible. Ninguna de las dos factorizaciones anteriores son "buenas", la mejor sería* $P(x) = (x+7)(x+1)^2(x-2)^3$

Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ *un polinomio de grado n. Si* $x = a_1$ *es una raíz del polinomio y* $g_1(x)$ *es el cociente al dividir* $P(x)$ *por* $x - a_1$ *(recordemos que el resto es cero) entonces por el algoritmo de la división tenemos una primera factorización de* $P(x) = (x - a_1)g_1(x)$

$$\begin{array}{r|l} P(x) & x - a_1 \\ \cline{2-2} 0 & g_1(x) \end{array}$$

El grado de $g_1(x)$ *es* $n - 1$. *Si procedemos de la misma forma con este polinomio y se diera el caso de que* $x = a_2$ *es una de sus raíces, entonces si* $g_2(x)$ *es el cociente al dividir* $g_1(x)$ *por* $(x - a_2)$, *tenemos que* $g_1(x) = (x - a_2)g_2(x)$ *y encadenando con la igualdad anterior la factorización de* $P(x)$ *sería ahora* $P(x) = (x - a_1)(x - a_2)g_2(x)$. *El grado del polinomio* $g_2(x)$ *es* $n - 2$. *Podríamos seguir este proceso hasta que el polinomio cociente* $g_i(x)$, *que tiene grado* $n - i$, *en el paso i no tuviera más raíces. Por ejemplo, vamos a factorizar el polinomio* $P(x) = x^5-3x^4-4x^3+28x^2-37x+15$. *Buscamos sus raices por medio del algoritmo de Ruffini:*

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 1 & -3 & -4 & 28 & -37 & 15 \\
1 & & 1 & -2 & -6 & 22 & -15 \\
\hline
 & 1 & -2 & -6 & 22 & -15 & 0 \\
1 & & 1 & -1 & -7 & 15 & \\
\hline
 & 1 & -1 & -7 & 15 & 0 & \\
-3 & & -3 & 12 & -15 & & \\
\hline
 & 1 & -4 & 5 & 0 & &
\end{array}$$

El último cociente es el polinomio $g_3(x) = x^2 - 4x + 5$ que no tiene raíces reales por lo que la factorización del polinomio es $P(x) = (x-1)^2(x+3)(x^2 - 4x + 5)$.

Teorema 6 *Sea el polinomio de grado n $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ tal que tiene n-raíces reales $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Entonces la descomposición factorial del polinomio es $P(x) = = a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$*

Demostración

Según el teorema del resto es equivalente decir que $x = x_1$ es raíz de $P(x)$ que decir que $x - x_1$ es divisor de $P(x)$. Sea $g_1(x)$ el cociente al dividir $P(x)$ entre $x - x_1$. Entonces $P(x) = = (x - x_1)g_1(x)$, grado de $g_1(x) = n - 1$. También se verifica que $x - x_2$ es divisor de $P(x)$ y como no es divisor de $x - x_1$, ha de ser $x - x_2$ divisor de $g_1(x)$. Sea $g_2(x)$ el cociente al dividir $g_1(x)$ entre $x - x_2$. Entonces $g_1(x) = (x - x_2)g_2(x)$ siendo grado $g_2(x) = n - 2$. Si encadenamos esta igualdad con la expresión de $p(x)$ se obtiene la igualdad $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)g_2(x)$. Podríamos reiterar el proceso hasta llegar a la expresión $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)g_n(x)$ donde grado $g_n(x) = n - n = 0$, esto nos dice que $g_n(x)$ es un número $a \in \mathbb{R}$. Afinamos más, la expresión de $P(x)$ es $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$. Si desarrollaramos esta expresión observaríamos que el coeficiente principal del polinomio (el coeficiente del término de mayor grado) es ***a*** *y sabemos que también es a_n cuando hemos declarado el polinomio, es decir $a = a_n$. Luego $P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$*