PRUEBA SEPTIEMBRE MATEMÁTICAS 3º ESO

1. Ejercicio 1

De los siguientes números, indica cuáles de ellos son naturales, enteros, racionales o irracionales:

$$-\frac{6}{3}, \quad \sqrt{16}, \quad \sqrt{8}, \quad 4,59, \quad 2,8\widehat{4} \quad \frac{7}{3}$$

Solución:

Un brevísimo resumen sobre la clasificación de los números. Los números naturales son los que emplea el hombre para contar u ordenar objetos. Se representan por el conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$. Los números enteros están formados por los naturales con signo negativo, el cero y los naturales con signo positivo, se representan mediante el conjunto $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, ...\}$. Los números racionales se obtienen como cociente de dos números enteros con denominador no nulo. Estos números son números con un número finito de cifras decimales o infinitas pero en este caso las cifras decimales han de ser periódicas. El conjunto de los números racionales se representa por $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b}\ donde\ a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}\ y\ b \neq 0\right\}$. Hay números que no son racionales, se llaman irracionales y se caracterizan por tener infinitas cifras decimales no periódicas. Hay dos tipos de números irracionales: los algebraicos que son soluciones de una ecuación algebraica como por ejemplo $\sqrt{p},\ p\ primo$ que es solución de la ecuación $x^2 - p = 0$, y los transcendentes que no son solución de ninguna ecuación algebraica como por ejemplo π. El conjunto de los números irracionales se representa por $\mathbb{I}$

Resulta que el conjunto de los números naturales está contenido en el conjunto de los números enteros y este en el conjunto de los números racionales. Asi que si un números es natural, también es entero y racional, si es entero también es racional (aunque no tiene porqué ser natural). Respondemos al ejercicio:

$-\frac{6}{3} = -2 \in \mathbb{Z}$, se trata de un número entero

$\sqrt{16} = 4 \in \mathbb{N}$, es un número natural

$\sqrt{8} = 2\sqrt{3}$, la raiz de un número primo es un irracional, $\sqrt{8}$ es un número irracional.

$4,59 = \frac{459}{100} \in \mathbb{Q}$, es un número irracional

Sea $x = 2,8\widehat{4} = 2,84444....$ Entonces $100x = 284,4444....$ y también se verifica que $10x = 28,4444.....$ Si restamos las dos últimas expresiones $90x = 284 - 28 = 256 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \dfrac{256}{90} = \dfrac{128}{45} \in \mathbb{Q}$, se trata de un número racional.

$\dfrac{7}{3}$ es una fracción irreducible al ser $m.c.d.\{7,3\} = 1$, es un número racional

2. Ejercicio 2

Calcula (sin utilizar calculadora para resolver el interior del paréntesis) y expresa el resultado en notación científica:

a) $\left(3,7 \cdot 10^6 - 6,6 \cdot 10^8\right)^2$

b) $2,1\widehat{6} + \dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{5}{2}\right) - \left[\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{4}\right]$

Solución:

a) $\left(3,7 \cdot 10^6 - 6,6 \cdot 10^8\right)^2 = \left(0,037 \cdot 10^8 - 6,6 \cdot 10^8\right)^2 = \left(-6,563 \cdot 10^8\right)^2 =$
$= 43,072969 \cdot 10^{16}$

b) $2,1\widehat{6} + \dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{5}{2}\right) - \left[\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{4}\right] = \dfrac{216-21}{90} - \dfrac{15}{8} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{39}{18} - \dfrac{15}{8} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{156-135-36}{72} =$
$= \dfrac{-15}{72} = -\dfrac{5}{24}$

3. Ejercicio 3

Calcula y simplifica el resultado $\dfrac{3^{-4} \cdot 9^2}{3^{-1}}$

Solución:

$\dfrac{3^{-4} \cdot 9^2}{3^{-1}} = 3^{-4} \cdot 3^4 \cdot 3^1 = 3$

4. Ejercicio 4

Opera, siempre que puedas, y simplifica extrayendo factores del radical:

a) $\sqrt{5} + \sqrt{7}$, se trata de radicales no semejantes ni convertibles a semejantes. No se pueden operar.

b) $\left(\sqrt{2}\right)^3 \cdot \sqrt{6} = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 4 \cdot \sqrt{3}$

c) $3 \cdot \sqrt[3]{2} + 5 \cdot \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} = (3 + 5 - 1) \cdot \sqrt[3]{2} = 7 \cdot \sqrt[3]{2}$

d) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{6}$

5. Ejercicio 5

Alicia gasta 1/3 del dinero que tenía en comprarse un libro y 3/4 de lo que le quedaba en un regalo para su amiga María. Si aun le quedan 6 €, ¿cuánto dinero tenía al principio?

Solución:

Si gasta $\frac{1}{3}$ le quedan $\frac{2}{3}$. Ahora gasta $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.La fracción que supone el gasto total es $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$. Le ha quedado finalmente la sexta parte del dinero que tenía al principio. Si x es el dinero que tenía al principio entonces $\frac{1}{6} \cdot x = 6 \Rightarrow x = 36$ €.

6. Ejercicio 6

a) ¿En cuánto se convertirán 3000 euros colocados al 2 % de interés compuesto anual durante 5 años?

b) ¿Cuánto dinero deposité en un banco si después de 4 años de tenerlo invertido al 5 % de interés compuesto anual se ha convertido en 2431,01 euros?

Solución:

a) Aplicamos la fórmula que nos da el capital final en la capitalización compuesta $C = C_0(1+r)^t$ donde r es el rédito en tanto por uno. Entonces $C = 3000 \cdot (1+0,02)^5 =$ $= 3312,2424096$ €

b) $2431,01 = C_0 \cdot (1+0,05)^4 \Rightarrow 2431,01 = C_0 \cdot 1,21550625$. Luego $C_0 = \frac{243101}{1,21550625} =$ $= 2000$ €

7. Ejercicio 7

a) Resuelve y simplifica $(x+4)(2x-1) - (x+2)^2 + (x-1)(x+1)$

b) Halla el cociente y el resto de la siguiente división:
$(9x^4 - 24x^3 + 27x^2 - 18x + 6) : (3x^2 - 2x + 2)$

Solución:

a) $(x+4)(2x-1) - (x+2)^2 + (x-1)(x+1) = 2x^2 - x + 8x - 4 - (x^2 + 4x + 4) + x^2 - 1 =$ $2x^2 - x + 8x - 4 - \cancel{x^2} - 4x - 4 + \cancel{x^2} - 1 = 2x^2 + 3x - 9$

b) La solución está dada con la caja de división de la forma en que lo hacen en Estados Unidos, si nos damos cuenta esto no debe suponer problema alguno.

$$\begin{array}{r|l} & 3x^2 \quad -6x+3 \\ 3x^2-2x+2 & 9x^4-24x^3+27x^2-18x+6 \\ & -9x^4 \quad +6x^3 \quad -6x^2 \\ \hline & -18x^3+21x^2-18x \\ & 18x^3-12x^2+12x \\ \hline & 9x^2 \quad -6x+6 \\ & -9x^2 \quad +6x-6 \\ \hline & 0 \end{array}$$

El cociente es: $3x^2 - 6x + 3$, la división es exacta, su resto es cero.

8. Ejercicio 8

Resuelve:

a) $3 - 2x + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - x\right) - \frac{x+1}{3} = 2$

b) $5x^2 - 4x + 6 = 10 - x + 4x^2$

c) $\left.\begin{array}{l} 5y - 6x - 7 = 0 \\ 5x + 6y + 16 = 0 \end{array}\right\}$

Solución:

a) $3 - 2x + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - x\right) - \frac{x+1}{3} = 2 \Rightarrow 3 - 2x + \frac{1}{6} - \frac{x}{3} - \frac{x+1}{3} = 2$. El mínimo común múltiplo de los denominadores es 6, la ecuación anterior es equivalente a :
$\frac{18}{\cancel{6}} - \frac{12x}{\cancel{6}} + \frac{1}{\cancel{6}} - \frac{2x}{\cancel{6}} - \frac{2x+2}{\cancel{6}} = \frac{12}{\cancel{6}} \Rightarrow 18 - 12x + 1 - 2x - 2x - 2 = 12 \Rightarrow -16x = -5$, la solución es $\boxed{x = \frac{5}{16}}$

b) $5x^2 - 4x + 6 = 10 - x + 4x^2$. Si trasponemos todos los términos al primer miembro de la ecuación obtenemos $x^2 - 3x - 4 = 0$. Si aplicamos ahora la fórmula de Baskara:
$x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$. Las soluciones de la ecuación son $\boxed{x_1 = \frac{3+5}{2} = 4;\ x_2 = \frac{3-5}{2} = -1}$

c) El sistema lo ordenamos de la siguiente forma:

$$\left.\begin{array}{l} -6x + 5y = 7 \\ 5x + 6y = -16 \end{array}\right\}$$

Multiplicamos la primera ecuación por 5 y la segunda por 6 obteniendo:

$$\left.\begin{array}{l} -30x + 25y = 35 \\ 30x + 36y = -96 \end{array}\right\}$$

Si sumamos estas dos últimas ecuaciones obtenemos $61y = -61 \Rightarrow \boxed{y = -1}$. Si sustituimos este valor en la primera ecuación del principio $-6x + 5 = 7 \Rightarrow \boxed{x = \dfrac{-1}{3}}$

9. Ejercicio 9

Se mezclan 625 litros de aceite de oliva, de 3,2 €/l, con cierta cantidad de aceite de girasol de 1,6 €/l , resultando la mezcla a 2,6 €/l. ¿Cuántos litros de aceite de girasol se han mezclado?

Solución:

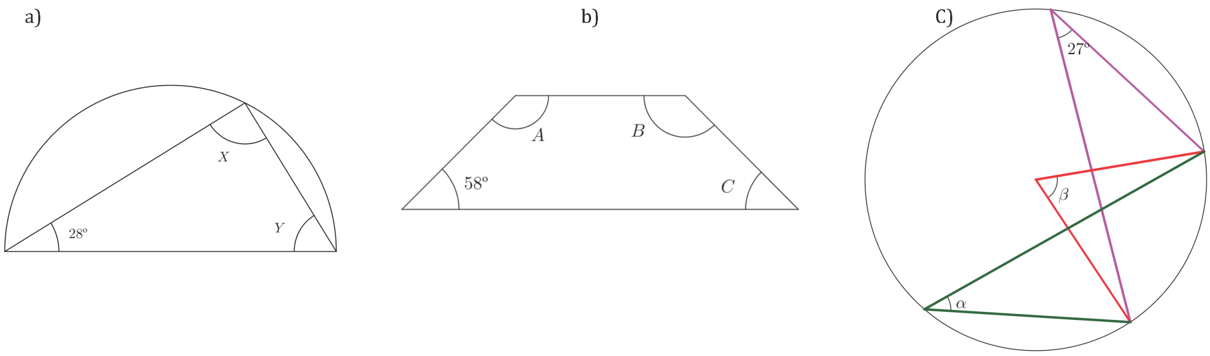
Resumimos toda la información en la siguiente tabla:

	Aceite 3.2 €/l	Aceite 1.6 €/l	Mezcla
Cantidad	625	x	$625 + x$
Precio	3.2	1.6	2.6
Costes	$625 \cdot 3{,}2 = 2000$	$1{,}6x$	$2{,}6(625 + x)$

Como coste aceite 3.2 €/l + coste aceite 1.6 €/l = coste de la mezcla, se tiene la ecuación $2000 + 1{,}6x = 2{,}6(625 + x) \Rightarrow 2000 + 1{,}6x = 1625 + 2{,}6x \Rightarrow 375 = x$. Hay que mezclar 375 litros de aceite de girasol.

10. Ejercicio 10

Halla el valor de los ángulos señalados en cada figura:



Solución:

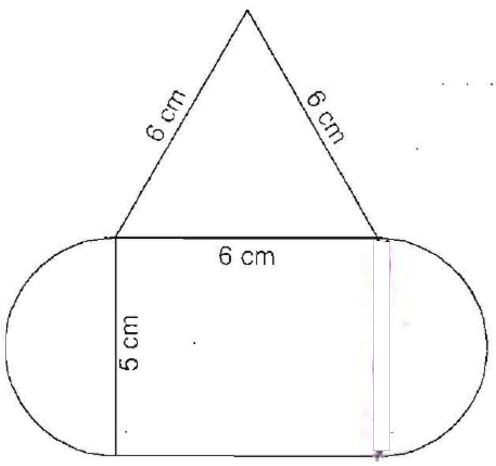
a) Se supone que la figura representa a un triángulo inscrito en una semicircunferencia. El ángulo inscrito X abarca, por tanto, la mitad del ángulo central que es de 180º. Luego $X = \dfrac{180}{2} = 90^o$. El triángulo es rectángulo, la suma de sus dos ángulos águdos es 90º, es decir $Y + 28 = 90 \Rightarrow Y = 72^o$

b) Se supone que la figura representa a un trapecio isósceles. Entonces es evidente que $C = 58^o$. También es obvio que $A = B$ y al sumar 360º los cuatro ángulos interiores del trapecio obtenemos $2 \cdot 58 + 2 \cdot A = 360 \Rightarrow A = \dfrac{360 - 116}{2} = 122^o$

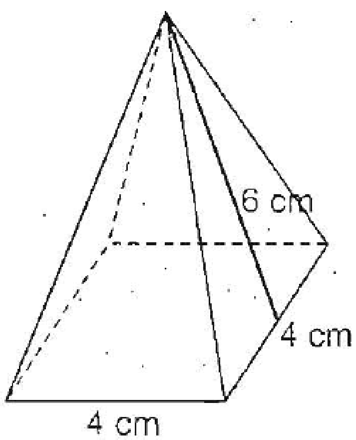
c) El ángulo inscrito α abarca el mismo arco que el ángulo inscrito de 27º. Luego $\alpha = 27^o$. El angulo central que abarca el mismo ángulo que el inscrito mide el doble de este, es decir $\beta = 2 \cdot 27 = 54^o$

11. Ejercicio 11

a) Halla el área de esta figura:



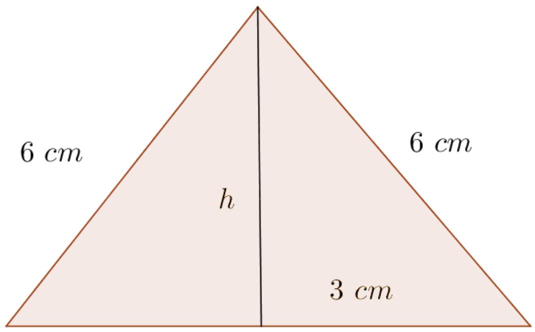
b) Halla el volumen de esta pirámide:



Solución:

a) La figura se puede descomponer en un triángulo equilatero de lado 6cm, un círculo (dos semicírculos) de radio 2.5 cm y un rectángulo de base 6cm y altura 5 cm.

i) Área del triángulo equilátero:



$h = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$

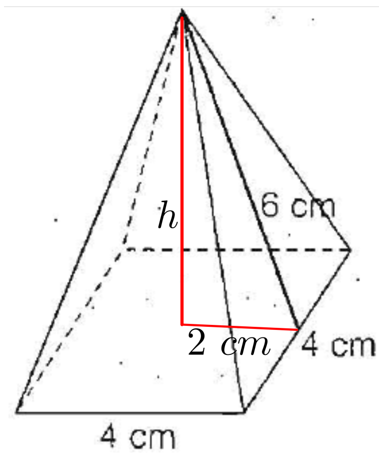
$$A_1 = \frac{6 \cdot 3\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}\ cm^2$$

ii) Área del círculo $A_2 = \pi \cdot 2{,}5^2 = 6{,}25\pi\ cm^2$

iii) Área del rectángulo de base 6 cm. y altura 5 cm, $A_3 = 6 \cdot 5 = 30\ cm^2$

El área de la figura es $\boxed{A = 9\sqrt{3} + 6{,}25\pi + 30\ cm^2}$

b) El volumen de la pirámide viene dado por $V = \dfrac{1}{3} A_b h$. El área de la base vale $A_b = 4^2 = 16\ cm^2$. Trazamos la altura de la pirámide:



Por el teorema de Pitágoras $h = \sqrt{6^2 - 2^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$. El volumen de la pirámide es $V = \dfrac{1}{3} \cdot 16 \cdot 4\sqrt{2} = \dfrac{64\sqrt{2}}{3}\ cm^3$

12. Ejercicio 12

Representa las gráficas de las siguientes funciones:

a) $y = -3x + 1$

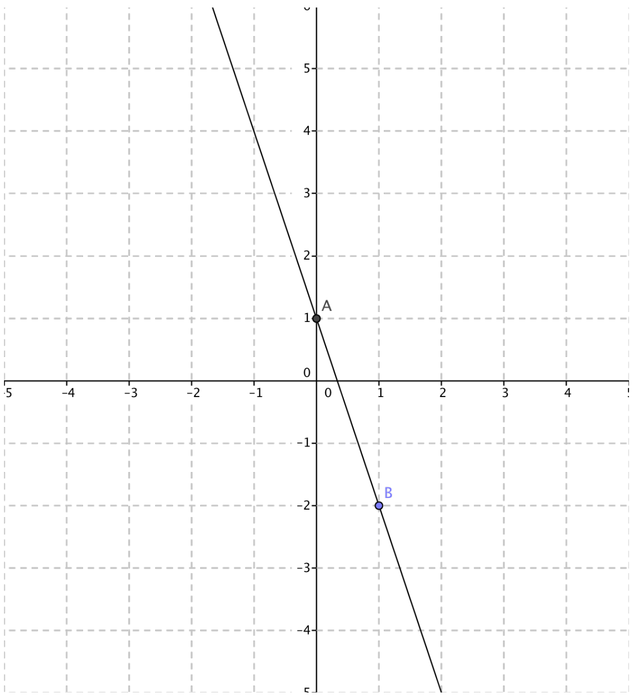
b) $y = x^2 - 2x + 5$

Solución:

a) La expresión analítica de la función corresponde con la gráfica de una recta que queda determinada por dos puntos. Damos la siguiente tabla de valores

X	0	1
Y	1	-2

A partir de esta tabla la representación gráfica es



b) La gráfica es una parábola cuyos elementos son.

i) Vértice: $x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{2}{2} = 1 \Rightarrow y_v = 1^2 - 2 \cdot 1 + 5 = 4$. El vértice es $\boxed{V(1,4)}$

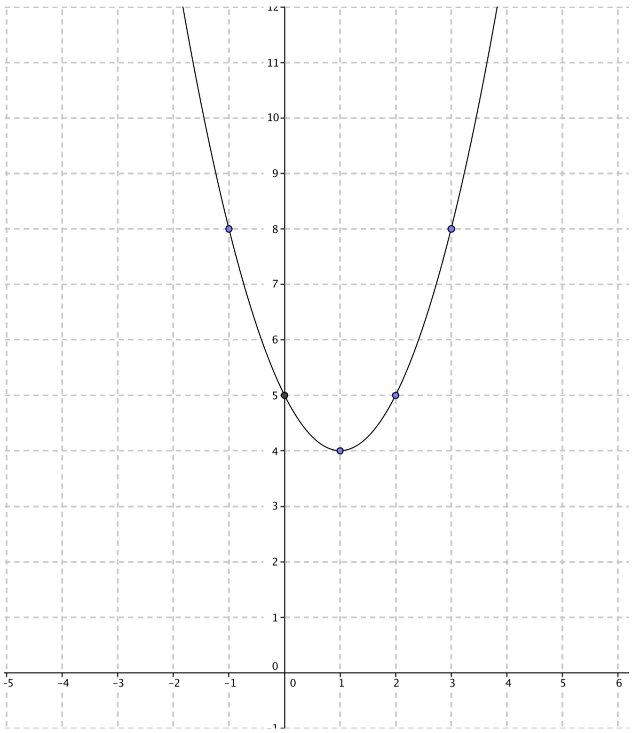
ii) Corte con el eje Y: $x = 0 \Rightarrow y = 5$ el corte con el eje Y está en el punto $\boxed{(0,5)}$

iii) Corte con el eje X : $y = 0 \Rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{-16}}{2}$, no corta al eje X

Damos la siguiente tabla de valores

X	-1	0	1	2	3
Y	8	5	4	5	8

A partir de esta tabla la gráfica de la función es:



13. Ejercicio 13

a) Halla la ecuación de la recta que nos da el coste total en función de la cantidad de agua cogida y represéntala graficamente.

b) ¿Cuánto tendríamos que pagar si cogiéramos 5 litros de agua?

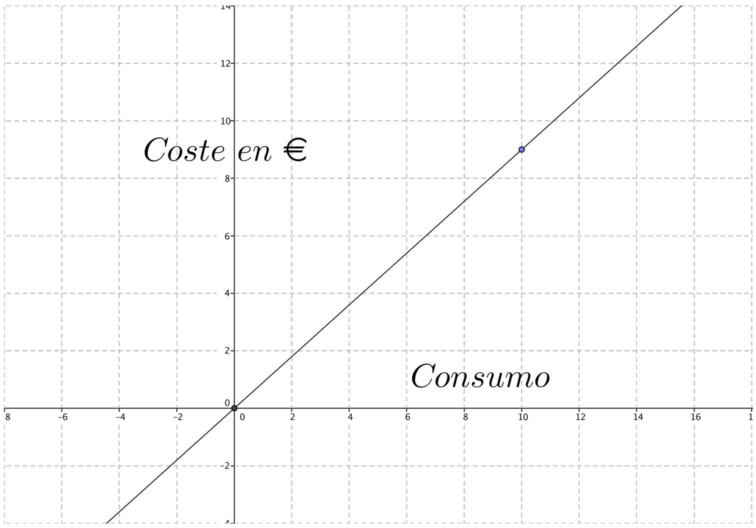
Solución:

El enunciado puede parecer capcioso. Para que no hubiera lugar a equívocos debiera precisar el coste de la unidad de medida del agua extraída. Por mi cuenta y riesgo establezco que la unidad de medida es el metro cúbico (m^3) y que el precio de coste de la unidad de medida es 0.90 €. Empleo la variable independiente x para indicar el agua gastada (¿cogida?) y la variable dependiente y será la que indique el coste de x.

a) La función de coste es $y = 0{,}90x$ que es una recta que pasa por el origen de coordenadas. Damos la siguiente tabla de valores:

X	0	10
Y	0	9

A partir de esta tabla la gráfica es:



b) Si gastamos 5 litros de agua el coste sería $y = 5 \cdot 0{,}90 = 4{,}5$ €

14. Ejercicio 14

En una caja hay cuatro bolígrafos azules y tres rojos y uno verde. Sacamos un bolígrafo al azar y nos fijamos en su color. Escribe el espacio muestral y calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) Azul b) Azul o rojo c) No rojo

Solución:

La probabilidad viene dada por $P = \dfrac{Casos\ favorables}{Casos\ posibles}$. Sean los sucesos $X \equiv$ Obtener bolígrafo azul en la extracción, $Y \equiv$ Obtener bolígrafo rojo en la extracción

a) $P(X) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

b) Aplicamos los axiomas de Kolmogorov $P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y)$. Se tiene que
$P(Y) = \dfrac{3}{8}$, los sucesos X e Y son incompatible por lo que $P(X \cap Y) = 0$. Luego $\boxed{P(X \cup Y) = \dfrac{4}{8} + \dfrac{3}{8} = \dfrac{7}{8}}$

c) Si denotamos por $\overline{Y}$ al suceso contrario al sacar bolígrafo rojo (no rojo), se tiene que $P(\overline{Y}) = 1 - P(Y) = 1 - \dfrac{3}{8} = \dfrac{5}{8}$

15. Ejercicio 15

En una caja hay cinco bolígrafos azules, tres negros y dos rojos. sacamos un bolígrafo y sin devolverlo a la caja, sacamos otro. Calcula la probabilidad de que:

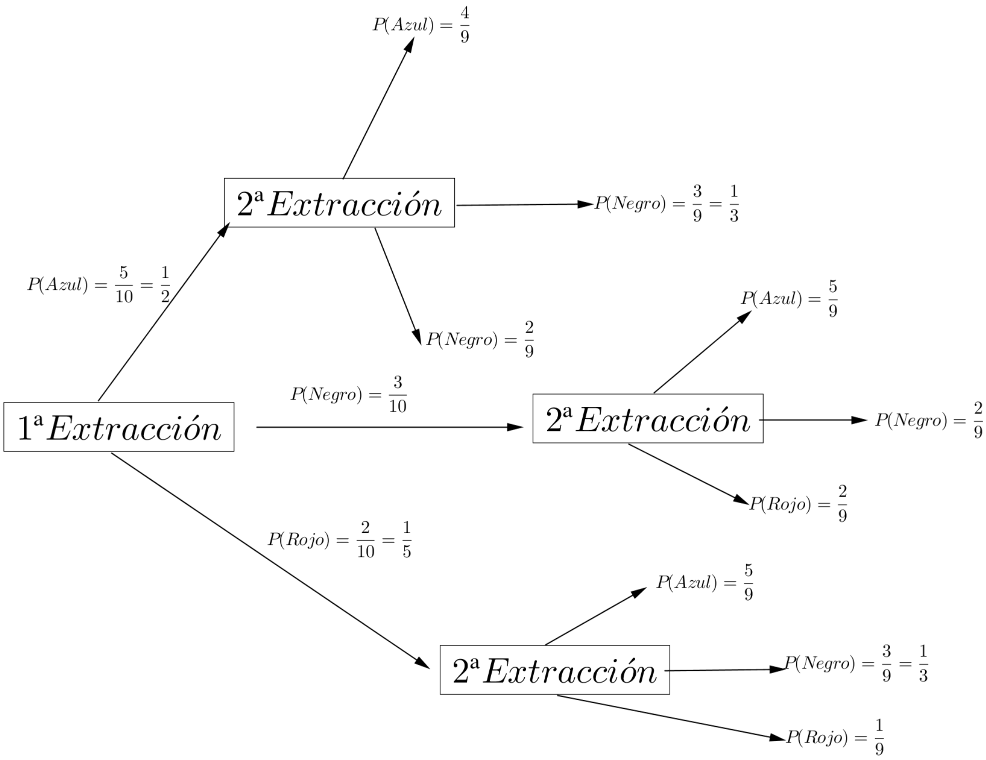
a) Uno sea rojo y otro azul.

b) Los dos sean negros.

c) Los dos sean del mismo coior.

Solución:

Del enunciado se desprende el siguiente diagrama en árbol:



De la observación del árbol obtenemos:

a) $P(Rojo\ y\ Azul) = \frac{1}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{9} = \frac{1}{9}$

b) $P(Negro\ y\ Negro) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$

c) $P(Mismo\ Color) = P(Rojo\ y\ Rojo) + P(Negro\ y\ Negro) + P(Azul\ y\ Azul) =$
$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{15} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} = \frac{14}{45}$

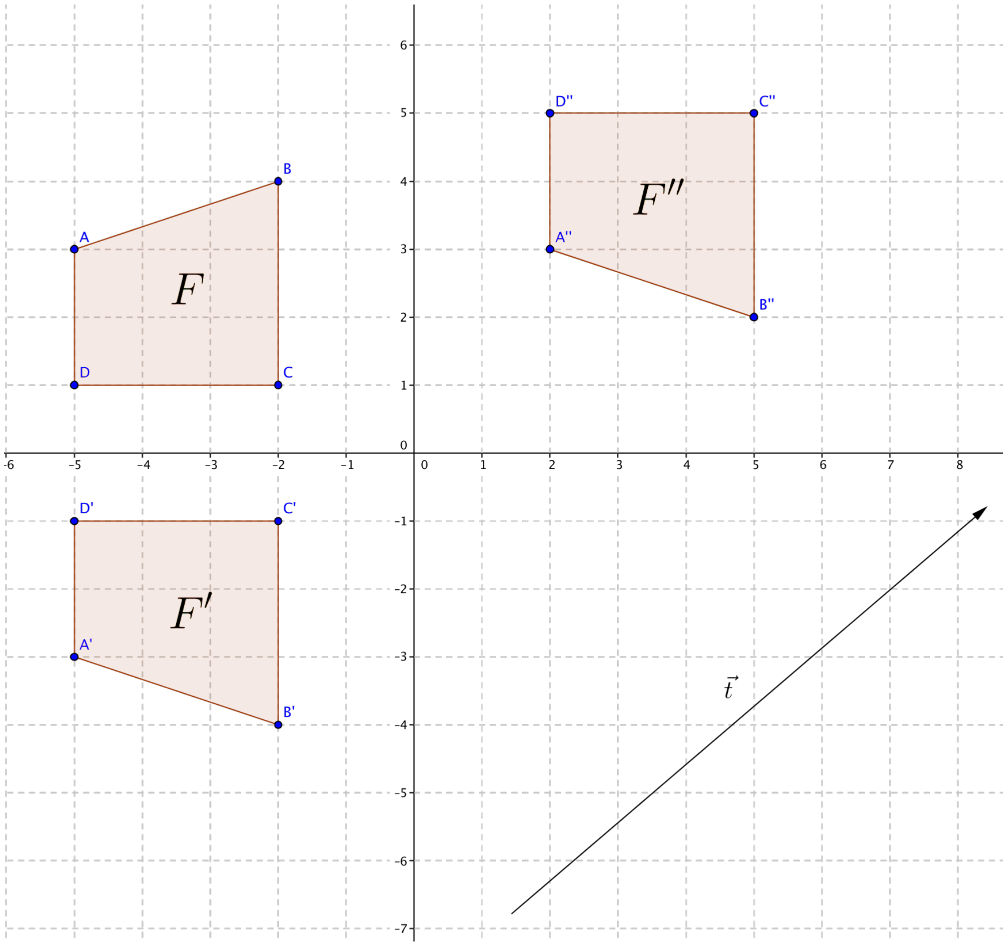
16. Ejercicio 16

Dibuja la figura, F, cuyos vértices son A(-5,3), B(-2, 4), C(-2, 1), y D(-5,1)

a) Obtén la figura, F' que se obtiene al aplicarle a F una simetría cuyo eje es el eje X.

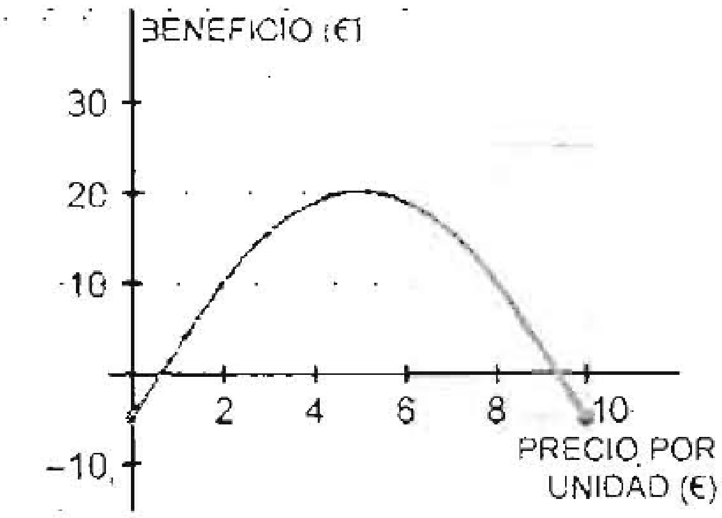
b) Aplícale a F' una traslación de vector $\vec{t} = (7, 6)$

Solución:



17. Ejercicio 17

La siguiente gráfica muestra la relación entre el precio por unidad de un cierto artículo y los beneficios diarios obtenidos por las ventas de dicho artículo:



a) ¿Cuál es el dominio de definición considerado?

b) Describe el crecimiento y el decrecimiento de la función.

c) ¿A qué precio se debe vender el producto para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál será ese beneficio?

d) ¿Qué beneficio (o pérdida) se obtiene al vender el producto a 10 ??

Solución:

a El dominio es el intervalo cerrado de extremos $x = 0$, $x = 10$, es decir $Dom(f) = [0, 10]$

b) La función es creciente en el intervalo (0,5) y decreciente en (5,10)

c) Precio para beneficio máximo = 5 €. Beneficio máximo = 20 €.

d) Al vender a 10 € se obtiene una pérdida (beneficio negativo) de 5 €.

18. Ejercicio 18

Por la recogida de agua en unas fuentes medicinales debemos pagar 20 céntimos de euro por el acceso al recinto y 5 céntimos de euro por cada litro recogido.

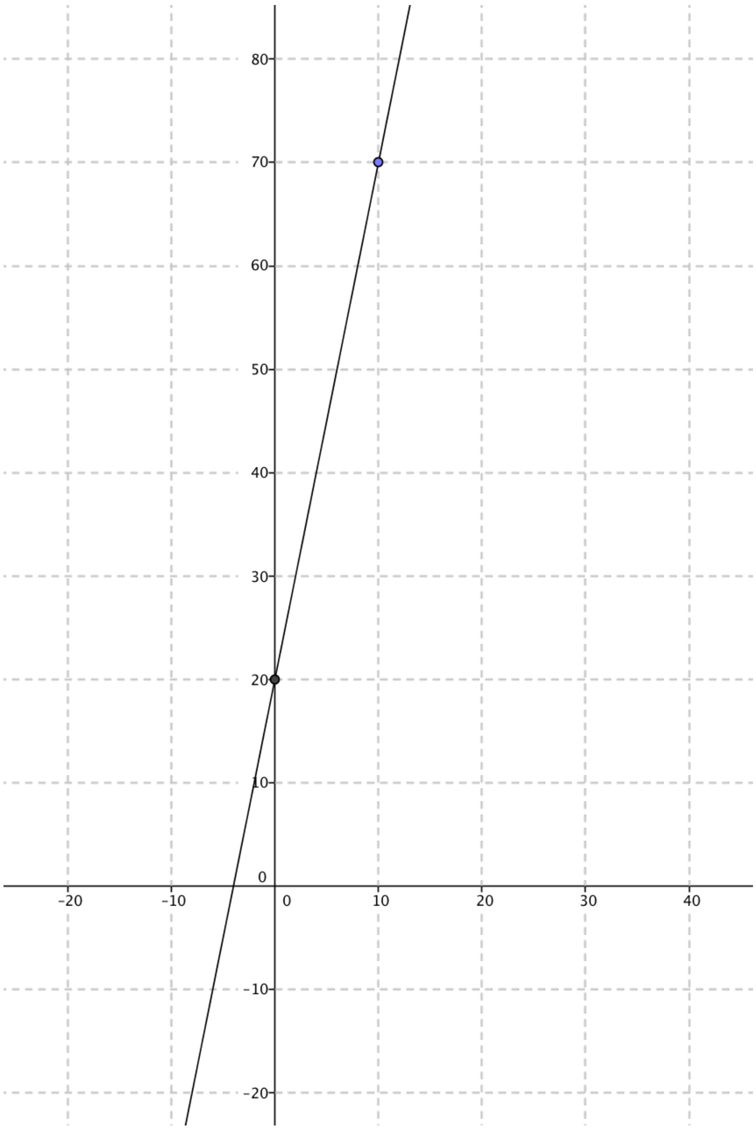
a) Halla la ecuación de la recta que nos da el coste total en función de la cantidad de agua cogida y represéntala gráficamente.

b) ¿Cuánto tendríamos que pagar si cogiéramos 5 litros de agua?

Solución:

La variable independiente es $x \equiv$ litros recogidos medida en litros, siendo la variable dependiente $y \equiv$ coste total medida en céntimos.

a) $y = 20 + 5x$. La gráfica de esta función es:

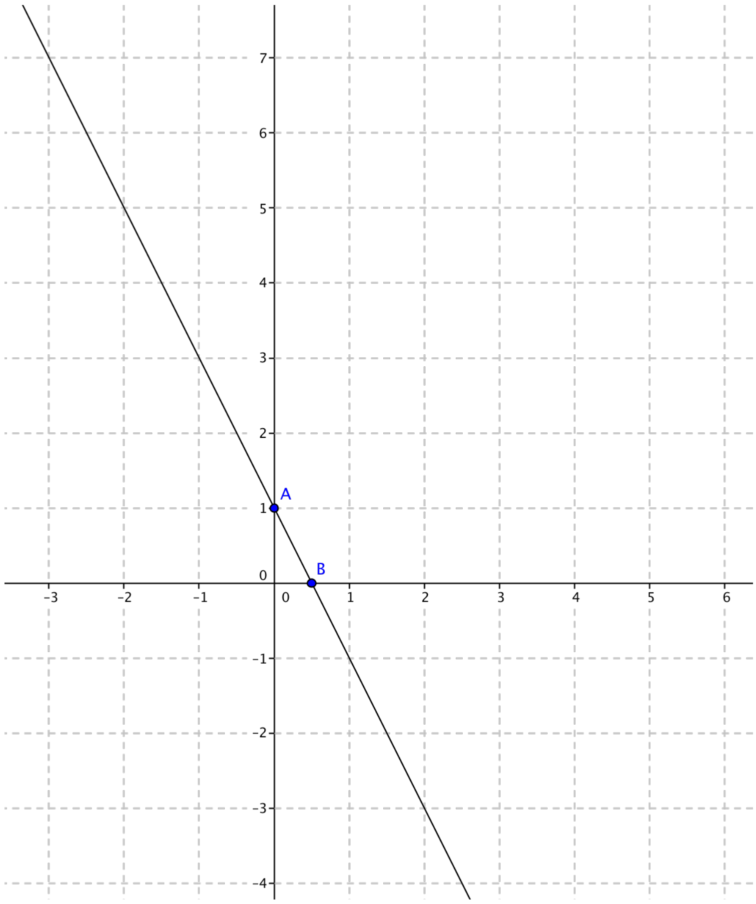


b) Por 5 litros de agua hemos de pagar $y = 20 + 5 \cdot 5 = 45\ Cts$

19. Ejercicio 19

a) Representa gráficamente la función 3x + 2y =4. ¿Pertenece el punto (-2,35; 1,8) a dicha recta?

b) Halla la ecuación de la siguiente recta:

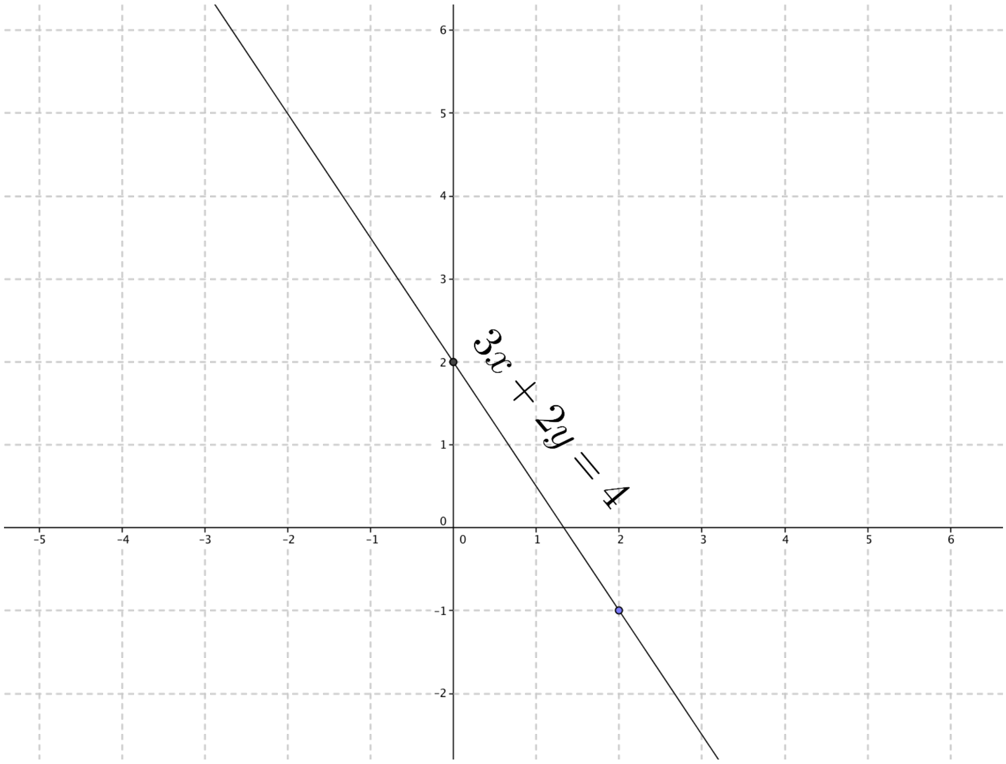


Solución:

a) $3x + 2y = 4 \Rightarrow y = \dfrac{4-3x}{2}$. Damos la siguiente tabla de valores:

X	0	2
Y	2	-1

A partir de esta tabla obtenemos la grafica:



Si el punto (-2,35; 1,8) perteneciera a la recta, entonces $-2{,}35 = \dfrac{4 - 3 \cdot 1{,}8}{2}$ esto es falso, el punto no pertenece a la recta.

b) La recta pasa por los (0,1) y (0.5,0). Si la ecuación de esta recta es $y = ax + b$, entonces $1 = a \cdot 0 + b$, por tanto $\boxed{b = 1}$. La recta es $y = ax + 1$ y si sustituimos el segundo punto $0 = a \cdot 0{,}5 + 1 \Rightarrow a = \dfrac{-1}{0{,}5} = -2$. La recta tiene por ecuación $\boxed{y = -2x + 1}$

20. Ejercicio 20

Las edades de los empleados de una cierta empresa, A, vienen recogidos en la siguiente tabla:

Edad	16-26	26-36	36-46	46-56	56-66
nº empleados	8	21	19	17	15

a) Construye la tabla de frecuencias relativas y porcentajes.

b) ¿Qué porcentaje de empleados tienen más de 46 años?

c) Representa la distribución mediante un histograma.

d) Calcula la media y la desviación típica de esta distribución.

e) En otra empresa B, la media de edad es de 35 años y la desviación típica es de 10 años. Calcula el coeficiente de variación en los dos casos y compara la dispersión en ambos grupos.

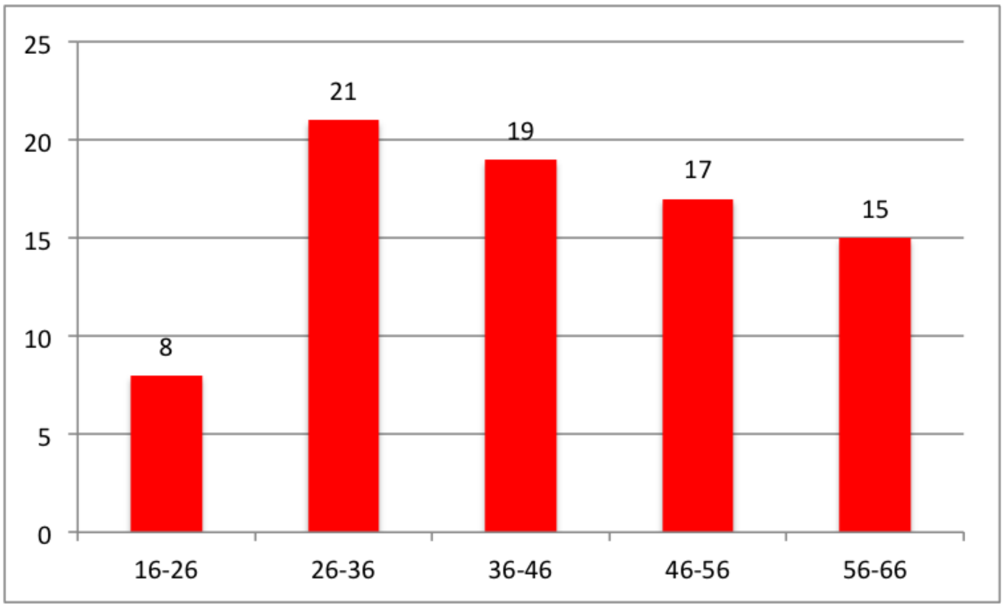
Solución:

a) Construimos una tabla completa que nos permita resolver todos los apartados

Edad	16-26	26-36	36-46	46-56	56-66
frecuencia absoluta f_i	8	21	19	17	15
Frecuencia relativa f_r	$\frac{8}{80}=\frac{1}{10}$	$\frac{21}{80}$	$\frac{19}{80}$	$\frac{17}{80}$	$\frac{15}{80}=\frac{3}{16}$
Porcentaje	10 %	26 %	24 %	21 %	19 %
Marca de clsae (x_i)	21	31	41	51	61
$f_i \cdot x_i$	168	651	779	867	915
$(x_i-\overline{x})^2 \cdot f_i$	3612.5	2657.8125	29.6875	1301.5625	5273.4375

b) Con más de 46 años hay un 40 % (21 % + 19 %)

c) El histograma que representa la distribución es:



d) La media de la distribución viene dada por $\overline{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{n} = \frac{3380}{80} = 42{,}25$. La varianza es $\sigma^2 = \frac{\sum(x_i-\overline{x})^2 \cdot f_i}{n} = \frac{12875}{80} = 160{,}94$ La desviación típica es $\sigma = \sqrt{\sigma^2} \Rightarrow$
$\Rightarrow \sigma = \sqrt{160{,}94} = 12{,}69$

e) El coeficiente de variación de Pearson viene dado por $CV = \dfrac{Desviacion\ tipica}{Media}$. Para la empresa A $CV(A) = \dfrac{12{,}69}{42{,}25} = 0{,}30026306$. Para la empresa B $CV(B) = \dfrac{10}{35} =$ $= 0{,}28571429$, está más dispersa la edad en la empresa A.