1. Ecuaciones

Una ecuación es una igualdad en la que hay términos conocidos y términos desconocidos. A los términos desconocidos se les llama incógnitas y se representan generalmente por una letra. Si la igualdad es I=D, llamamos término de la izquierda a la expresión I, siendo D el término de la derecha.

1.1. Ecuaciones equivalentes

Dos ecuaciones se dicen equivalentes si tienen la misma solución. Por ejemplo la ecuación $x^2 + 5x + 6$ tiene la misma solución que la ecuación $6x^2 + 30x + 36$, la solución de ambas es $x = -2$ o bien $x = -3$.

1.2. Transformaciones elementales con ecuaciones

Sea la ecuación I=D. Entonces $\forall\alpha \in \mathbb{R}$ las siguientes ecuaciones son equivalentes a I=D :

- $I \pm \alpha = D \pm \alpha$
- $I \cdot \alpha = D \cdot \alpha$
- Si $\alpha \neq 0$, $\dfrac{I}{\alpha} = \dfrac{D}{\alpha}$
- $I^\alpha = D^\alpha$
- En general si f es una aplicación inyectiva $f(I) = f(D)$

La afirmación de equivalencias mencionadas son evidentes. Por ejemplo cuando resolvemos la ecuación $5x - 2 = 6x - 4$, en la enseñanza tradicional se nos decía el 2 que está restando en el miembro izquierdo de la ecuación, pasa sumando al miembro derecho obteniendo $5x = 6x - 4 + 2$, es decir $5x = 6x - 2$. A continuación decíamos que el 6x que está sumando en el término de la derecha, pasa restando al de la izquierda con lo que $5x - 6x = -2$, o sea $-1x = -2$. Finalmente el -1 que está multiplicando en el miembro de la izquierda, pasa dividiendo al miembro de la derecha con lo que $x = \dfrac{-2}{-1} = 2$. ¡Qué horror!, y aun nos quejamos del atraso científico de España y la baja calidad de la enseñanza. Lo que acabo de describir se sigue enseñando en nuestras escuelas, la falta de preparación de los docentes es tan palpable que nadie se escandaliza ni trata de ponerle solución, ¡basta ya!. Si queremos cambiar el rumbo perdido de la enseñanza de las matemáticas hemos de desterrar la enseñanza algorítmica de memorieta. Veamos otra manera de argumentar la solución de la ecuación $5x-2 = 6x-4$. Queda claro que si tratamos de obtener la solución lo mismo nos da utilizar una ecuación que trabajar con una equivalente. Pues bien la ecuación $5x-2 = 6x-4$ es equivalente a $5x - \cancel{2} + \cancel{2} = 6x - 4 + 2$ (hemos sumado un mismo valor $\alpha = 2$ a ambos miembros de la ecuación)y si operamos $5x = 6x - 2$. Si restamos 6x a ambos miembros obtenemos la ecuación equivalente $5x - 6x = -2$, es decir $-x=-2$ y multiplicado ambos miembros por -1 se obtiene la solución $\boxed{x=2}$. Una vez que el alumno entienda lo que está haciendo poco importa si aplica algoritmos o no. En la mayoría de los libros de texto de 4º de ESO se explica la ecuación de 2º grado del siguiente modo:

Una ecuación de 2º grado es de la forma $ax^2+bx+c=0$ con $a\neq 0$

- **Ecuaciones completas.** Cuando $b\neq 0$ y $c\neq 0$ se dice que la ecuación es completa y se resuelve aplicando la siguiente fórmula:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\rightarrow\begin{cases}\text{Si } b^2-4ac>0 & \text{, hay dos soluciones}\\ \text{Si } b^2-4ac=0 & \text{, hay una única solución}\\ \text{Si } b^2-4ac<0 & \text{, no hay solución}\end{cases}$$

- **Ecuaciones incompletas.** Si $b=0$ o $c=0$ la ecuación se llama incompleta y se puede resolver con mucha sencillez sin necesidad de aplicar la fórmula anterior:

$b=0\rightarrow ax^2+c=0\rightarrow x^2=\dfrac{-c}{a}\rightarrow x_1=\sqrt{\dfrac{-c}{a}},\ x_2=-\sqrt{\dfrac{-c}{a}}$ (en el texto de Anaya el autor no se ha percatado de que para asegurar esto ha de ser $c<0$)

$c=0\rightarrow ax^2+bx=0\rightarrow x(ax+b)=0\rightarrow x_1=0,\ x_2=\dfrac{-b}{a}$

¡Qué manera más impresentable de mostrar las matemáticas!, no se trata de esto. Si los alumnos dicen que no le gustan estas matemáticas es síntoma de que piensan, a nadie le puede gustar este recetario.

¿De dónde viene la fórmula de Baskara $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ Vamos a obtenerla aplicando transformaciones elementales a la ecuación original. La ecuación $ax^2+bx+c=0$ es equivalente a $ax^2+bx+\cancel{c}-\cancel{c}=0-c$, es decir $ax^2+bx=-c$. En todo lo que sigue supondremos que $a\neq 0$. Si los miembros de la anterior ecuación los multiplicamos por 4a obtenemos $4a^2x^2+4abx=-4ac$ una ecuación equivalente y lo mismo sucede si a cada miembro le sumamos b^2. Por tanto la ecuación $ax^2+bx+c=0$ es equivalente a $4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac$. Pero se verifica que $(2ax+b)^2=4a^2x^2+4abx+b^2$, con lo que

$$(2ax+b)^2=b^2-4ac \tag{1}$$

Cuando despejamos una variable al cuadrado tenemos que tener en cuenta que la variable puede tomar el valor de la raíz positivo o negativo, es decir si $x^2=\alpha$ entonces $x=\sqrt{\alpha}$ o bien $x=-\sqrt{\alpha}$. Entonces de la ecuación $(2ax+b)^2=b^2-4ac$ se infiere que $2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}$. De nuevo esta ecuación es equivalente a $2ax+\cancel{b}-\cancel{b}=-b\pm\sqrt{b^2-4ac}$. Si dividimos los dos miembros de esta igualdad por 2a obtenemos $\dfrac{\cancel{2a}x}{\cancel{2a}}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

En cuanto a la exposición del tipo de soluciones que puede tener una ecuación de 2º grado, también deja mucho que desear. Se llama discriminante de la ecuación de 2º grado a la expresión $\Delta = b^2 - 4ac$.

Si $\Delta > 0$ podemos realizar el cáculo $\sqrt{\Delta}$ y las soluciones que nos da la fórmula de Baskara son $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Si $\Delta = 0$ y seguimos el desarrollo efectuado anteriormente, obtenemos que la ecuación de segundo grado es equivalente a (**??**) y por tanto $(2ax + b)^2 = 0$, es decir $2ax + b = 0$ y la solución $x = \dfrac{-b}{2a}$ es única.

Si $\Delta < 0$ no se puede realizar la operación $\sqrt{\Delta}$ en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales y la ecuación carecería de solución.

¿Qué interpretación geométrica se le puede dar a la ecuación de segundo grado? La ecuación $y = x^2$ representa a una parábola. Si la representamos gráficamente por medio de una tabla de valores quedaría la siguiente figura:

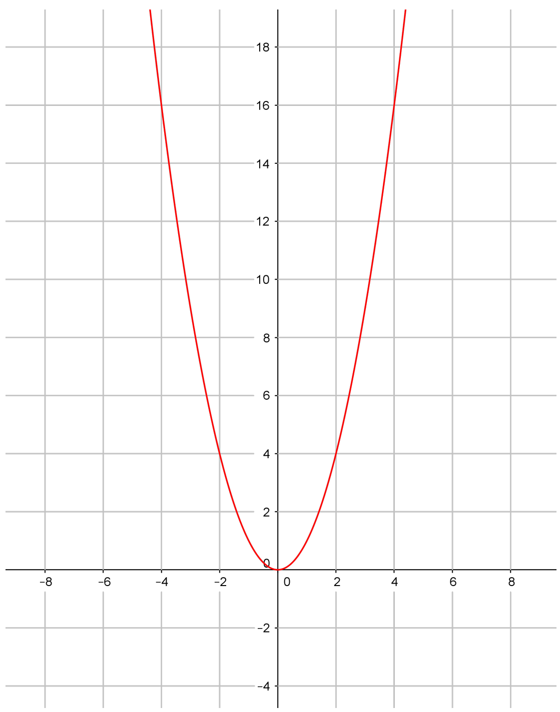

Figura 1: Gráfica de la función $y = x^2$

El vértice de la parábola anterior está en el origen de coordenadas (0,0), que coincide también con el punto de corte con los ejes (tan solo hay uno en este caso). Consideremos la función $y = ax^2 + bx + c$. Esta función la podemos poner en la forma $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$, o lo que es lo mismo $y - \frac{4ac - b^2}{4a} = a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2$, de modo que el vértice de la parábola está en el punto $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$. Precisamente las soluciones de la ecuación de 2º grado son las abcisas de los puntos de corte de la parábola con el eje OX.El que haya dos soluciones, una o ninguna geométricamente se traduce en que la parábola corte en 2 puntos al eje OX, que lo toque en un solo punto o que no lo corte. Todo esto queda reflejado en la siguiente gráfica:

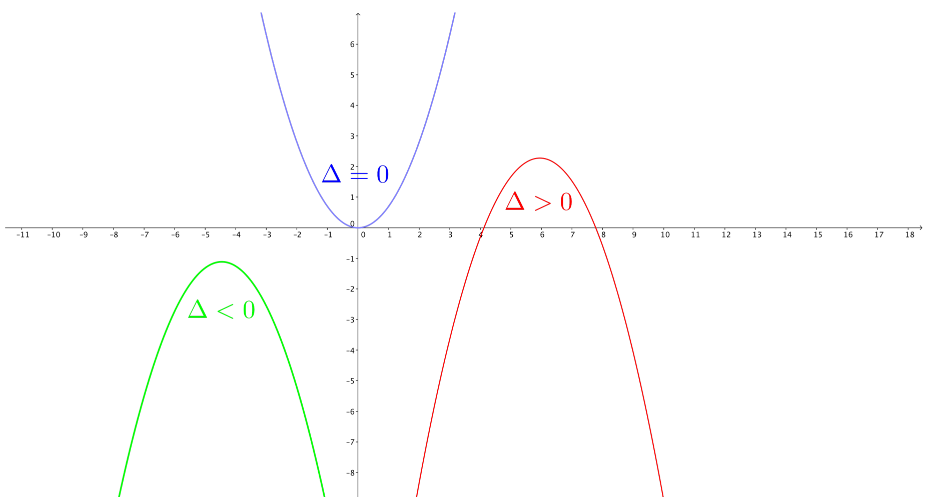

Figura 2: Soluciones de la ecuación de 2º grado

La ecuación de 2º grado más sencilla equivalente a $ax^2 + bx + c = 0$ es $x^2 - Sx + P = 0$, donde S representa la suma de las dos soluciones (o el doble de la solución única según el caso), si existen y P es el producto de estas (o el cuadrado de la solución única). Veamos el porqué de esto, como $a \neq 0$ podemos dividir por a cada miembro de la ecuación $\frac{\cancel{a}x^2}{\cancel{a}} + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Supongamos que $\Delta \geq 0$. Segun la fórmula de Baskara las raíces de la ecuación de segundo grado mencionada son $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. La suma de estas vale $S = x_1 + x_2 = -\frac{\cancel{2}b}{\cancel{2}a} = -\frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b}{a} = -S$. El producto de soluciones vale $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\cancel{b^2} - \cancel{b^2} + 4ac}{4a^2} = \frac{\cancel{4a}c}{\cancel{4}a^{\cancel{2}}} = \frac{c}{a}$. Si sustituimos estos valores en la expresión $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ obtenemos $x^2 - Sx + P = 0$