Geometria básica
3º E.S.O

Miguel Galo Fernández

29 de mayo de 2018

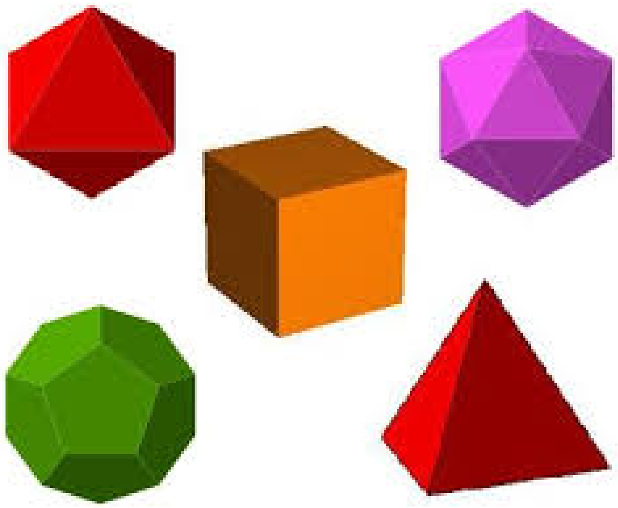


Figura 1: Sólidos Platónicos

Índice de Contenidos

1. Introducción

Cuando se abordan conceptos geométricos en el desarrollo de las matemáticas en ESO, lo primero que se observa es que con mucha frecuencia los maestros no están preparados para afrontar la transmisión de conocimientos de una forma clara. No entienden y, en muchos casos, no aceptan los cambios. Y es que, aunque parezca evidente, lo primero que tiene que saber un maestro de matemáticas es su materia, saberla en el sentido amplio y no solo en el contexto reducido del aula, es decir, un maestro debe poder ubicar su materia en el contexto mas general del programa de su nivel, tener la autonomia para poder inventar ejercicios significativos y conocer los contenidos necesarios previos que debe saber el alumno. Ninguna nueva tecnologia ni metodologia educativa puede subsanar la ignorancia en la materia.

Los recetarios para el cálculo de áreas y volúmenes con lápiz y papel no debieran tener cabida en la enseñanza actual. Si no se sabe lo que se está haciendo y tampoco se pretende otra cosa que el cálculo, hay software que resuelve el problema de una forma más rápida y eficiente. Por ejemplo con Geogebra (software de código abierto disponible gratuitamente para usos no comerciales y disponible en español) se pueden hallar áreas y volumenes de manera muy sencilla. Ni con aritmética de lápiz y papel ni utilizando Geogebra el alumno sabe lo que está haciendo. La ventaja que tiene la utilización del referido programa es la rapidez y precisión frente al resultado con lápiz y papel.

Yo creo que no deben transmitirse conocimientos matemáticos que no puedan ser demostrados a los alumnos salvo en contadas ocasiones (por la gran complicidad o dificultad de la demostración). El aprendizaje en matemáticas debe estar basado en el razonamiento y justificación de todo lo que se afirma, despejando todas las dudas que puedan surgir respecto a la veracidad de lo que se expone.

Pretendo mostrar un desarrollo de áreas y volumenes de cuerpos geométricos haciendo demostraciones de todas las fórmulas. El orden que sigo es el del libro Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas 3º ESO tema10 (Cuerpos Geométricos) y tema 11 (Transformaciones Geométricas). Iré aportando demostraciones (muchas de ellas mías) que si bien es verdad no tienen la pulcritud y elegancia que el rigor pudiera exigir, no es menos verdad que aportan una justificación a lo que afirma la fórmula. Veo demasiada receta en donde debiera haber más ideas y menos cuentas. ¿En el siglo XXI aprender fórmulas de memoria? No nos hace falta la memoria para eso, un simple móvil, tablet u ordenador nos soluciona el problema. El aprender fórmulas de memoria no se puede considerar conocimiento en nuestro mundo, eso ya pasó a la historia.

Es muy molesto, por falaz, ver como se presentan las matemáticas como mera herramiento de cálculo. Las demostraciones que se pueden hacer utilizando el cálculo infinitesimal (ahora se llama análisis matemático) son de un rigor y una belleza extraordinarios pero son inasequibles para un alumno de 3º de ESO. Me he basado en ellas para hacerlas utilizando el método de exhaución (bastante intuitivo pero certero).

Mi amiga Petronila, alumna de 3º ESO, me dice que no le gusta la geometría, que es horrorosa. Me describe la actividad geométrica en su clase. Le han dado las fórmulas de los polígonos (figuras planas) que ha de aprenderse de memoria. Con esas fórmulas y el Teorema de Pitágoras (aprendido tambien de memoria y mal enunciado) se han dedicado a resolver ejercicios que le ha propuesto su profesor en unas fotocopias que le ha proporcionado. Les ha dicho que no le gusta la forma de abordar la geometría que tiene el libro como tampoco le gustan los ejercicios que propone el libro de texto. Lo mismo ha ocurrido con las figuras en tres dimensiones: prismas, pirámides, figuras redondas ... Le han dado un recetario de áreas laterales, áreas totales y volúmenes que debe aprender de memoria y de nuevo le han dado las fotocopias con ejercicios (por cierto muy repetitivos). El profesor ha esgrimido los mismos argumentos que en el caso de las figuras planas. A estas alturas, el profesor de Petronila debiera saber que la memorización de fórmulas no constituye un objetivo a cubrir en la enseñanza.

Los estándares en geometría, de forma resumida son los siguientes:

1. Conoce y aplica las propiedades de los poliedros (fórmula de Euler, dualidad de poliedros regulares. . .).
2. Conoce los poliedros semirregulares y la obtención de alguno de ellos mediante truncamiento de los poliedros regulares.
3. Identifica planos de simetría y ejes de giro en figuras del espacio.
4. Calcula áreas de figuras espaciales sencillas.
5. Calcula áreas de figuras espaciales más complejas.
6. Calcula volúmenes de figuras espaciales sencillas.
7. Calcula volúmenes de figuras espaciales más complejas.
8. Resuelve problemas de enunciado de geometría en el espacio.
9. Obtiene la transformada de una figura mediante un movimiento concreto.
10. Obtiene la transformada de una figura mediante la composición de dos movimientos.
11. Reconoce figuras dobles en una cierta transformación o identifica el tipo de transformación que da lugar a una cierta figura doble.
12. Reconoce la transformación (o las posibles transformaciones) que llevan de una figura a otra.

La secuenciación de los contenidos de geometría en el libro de texto, o si se quiere, las secciones de contenido son:

Tema 11: Cuerpos geométricos (Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas 3. ESO. Anaya)

1. El método de exhaución de Arquímedes
2. Los Sólidos Platónicos (solo hay cinco poliedros regulares)
3. Poliedros conjugados o duales
4. Fórmula de Euler
5. Poliedros semirregulares
6. Truncamiento de polinomios: cuboctaedro e icosidodecaedro
7. Planos de simetría de una figura
8. Ejes de giro y orden de giro de una figura

9. Superficies de cuerpos geométricos
10. Volúmenes de cuerpos geométricos
11. Coordenadas geográficas
12. Usos horarios

¿Qué tiene que ver lo que el profesor le ha dado a Petronila con el contenido del libro? Nada, no tiene que ver nada. Los autores del libro dejan ver con claridad que se debe huir de la memorización, siempre dan una indicación, una idea que deja entrever la justificación de la fórmula que se está manejando. Lo que hace el profesor de mi amiga Petronila me recuerda a la escuela franquista, así me transmitieron a mi la idea de la geometría hace más de 50 años. ¡Odiaba la geometría! hasta que un magnifico matemático supo explicármela.

En el tema 12 "Transformaciones geométricas", se estudian las isometrías, con la secuenciación que pongo a continuación:

1. Traslaciones
2. Simetría axial
3. Simetría central
4. Giros Mosaicos, cenefas y rosetones

Petronila me dice que este tema se ha obviado, no se va a impartir. Es un gran error que comete su Colegio. Por ejemplo, el explicar como se conecta la geometría con el arte se muestra en la última sección mosaicos, cenefas y rosetones. Es evidente que con solo geometría no sería posible el arte, pero sin ella tampoco. Los movimientos se estudian mucho mejor y de forma más amena viendo el arte árabe, que empleaba con mucha frecuencia mosaicos y cenefas.

A continuación le propongo a mi amiga Petronila un desarrollo teórico sobre estos dos temas de geometría, espero que lo lea y me pueda ir diciendo si lo entiende y si le interesa.

2. El método de exhaución de Arquímedes

El método de exhaución de Arquímedes consiste en reducir líneas curvas a una sucesión de segmentos rectilíneos de longitud infinitesimal. Este método se utiliza para deducir fórmulas que nos permiten el cálculo de áreas y volumenes.

Supongamos que queremos hallar la superficie de un círculo de radio r. Podemos considerar este círculo como un polígono de n lados, con n muy grande. Valga como aproximación el siguiente gráfico:

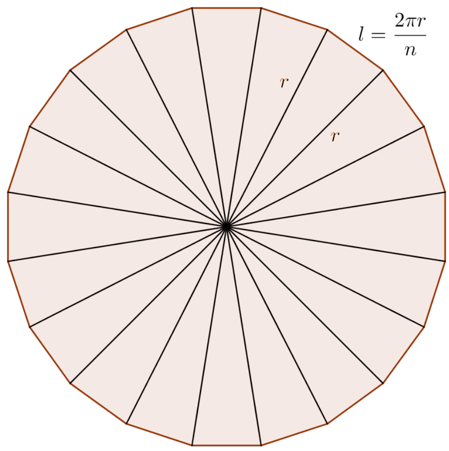


Figura 2: Aproximación de un polígono a un círculo.

El área del círculo queda dividida en n triángulos isósceles. La longitud de los lados iguales es r (radio de la circunferencia) y el lado desigual, que tomaremos como base, es $l = \dfrac{2\pi r}{n}$ (dividir la longitud de la circunferencia en n partes). Una manera de obtener una aproximación al área del círculo consiste en calcular la superficie de uno de estos triángulos y multiplicarla por n. Ampliando la imagen, los referidos triángulos serían de esta forma:

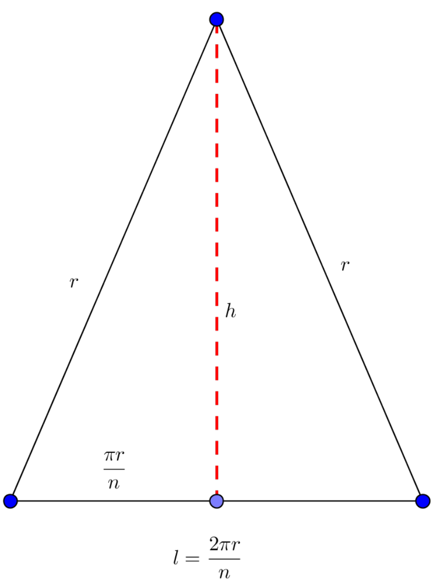


Figura 3: Triángulo divisor de la superficie.

Según el teorema de Pitágoras, la altura del triángulo vale $h = \sqrt{r^2 - (\frac{\pi r}{n})^2} = r\sqrt{1 - \frac{\pi^2}{n^2}} =$ $= \frac{r}{n}\sqrt{n^2 - \pi^2}$. La superficie del triángulo será por tanto $S = \frac{1}{2}\frac{2\pi r}{n} \cdot \frac{r}{n}\sqrt{n^2 - \pi^2}$, es decir $S = \frac{\pi r^2}{n^2}\sqrt{n^2 - \pi^2}$. El área del circulo valdrá $A = n \cdot \frac{\pi r^2}{n^2}\sqrt{n^2 - \pi^2} = \pi r^2\sqrt{1 - \frac{\pi^2}{n^2}}$. Si n es infinitamente grande el cociente $\frac{\pi^2}{n^2}$ se hará cero con lo que el área del circulo será $A = \pi r^2$

3. Tan solo hay cinco poliedros regulares

Lo que viene a continuación lo he obtenido de la página web de www.gaussianos.com

Un poliedro es una figura tridimensional limitada por polígonos regulares, que son las caras del poliedro. Se llama arista al segmento común a dos caras y vértice al punto donde concurren tres o más caras.

Para que el poliedro sea regular se tiene que dar que todas sus caras sean polígonos regulares iguales y que en cada vértice concurran el mismo número de caras. Por otra parte, si tomamos las caras que concurren en un vértice y las aplastamos hasta que queden en un plano, el ángulo formado por todas ellas debe ser menor que 360º, ya que si es igual o mayor que 360º no se podrá formar un poliedro regular convexo.

Bien, sabiendo todo esto lo que vamos a hacer es ir valorando todas las posibilidades. Supongamos que queremos formar un poliedro con triángulos equiláteros (recordad que las caras deben ser polígonos regulares), donde, como sabemos, cada ángulo mide 60º. Podríamos juntar tres de ellos para formar un vértice, obteniendo un ángulo de 180º. Como es menor que 360º esta configuración sería válida. De hecho da como resultado el tetraedro:

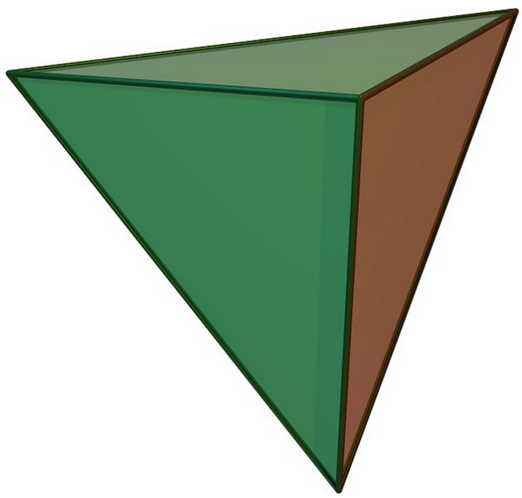


Figura 4: Tetraedro

También podríamos juntar cuatro triángulos equiláteros para formar un vértice. En este caso formarían un ángulo de 240º, que al ser también menor que 360º dará lugar a otro poliedro regular, el octaedro en este caso:

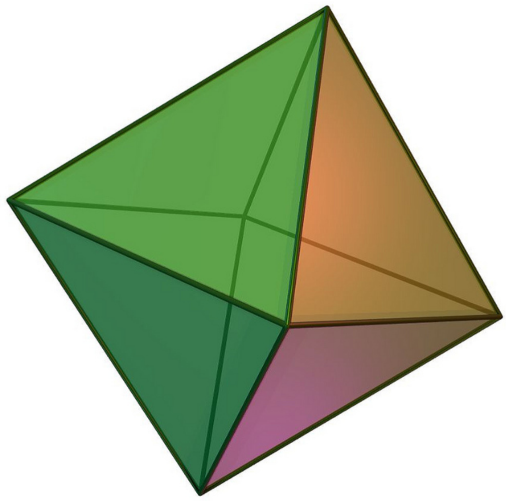


Figura 5: Octaedro

Podríamos juntar cinco triángulos equiláteros, formando así un ángulo de 300º, menor que 360º también. Tenemos así otro poliedro regular, el icosaedro:

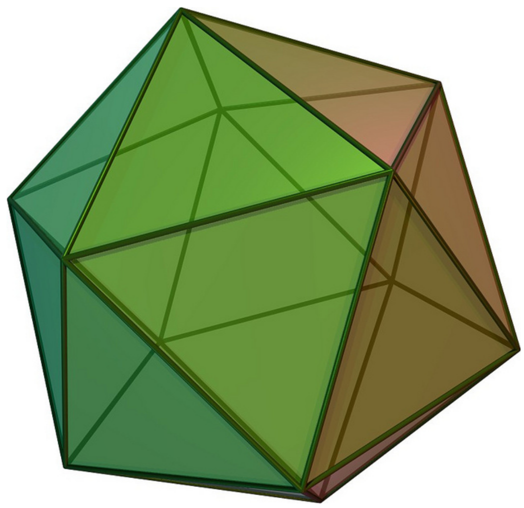


Figura 6: Icosaedro

¿Qué ocurre si tomamos más de cinco triángulos equiláteros? Pues que el ángulo que formaría el desarrollo plano de esa configuración sería mayor o igual que 360º, por lo que no tendríamos un poliedro regular convexo.

Pasemos a la siguiente opción, el cuadrado, en el que cada ángulo mide 90º. Si tomamos tres cuadrados obtenemos un ángulo de 270º, menor que 360º, por lo que tenemos poliedro regular, el cubo (o hexaedro):

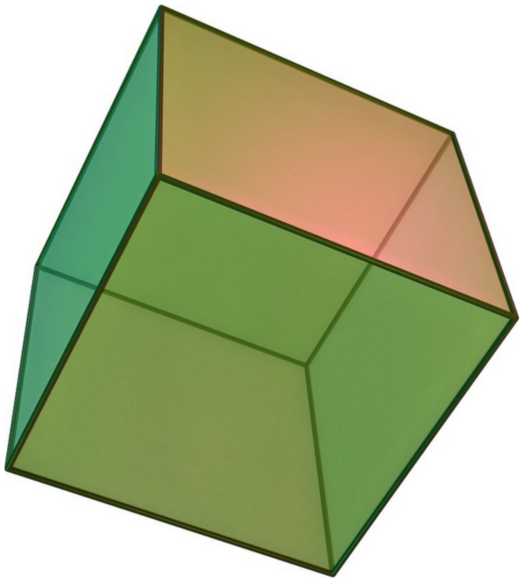


Figura 7: hexaedro o cubo

Si tomamos cuatro cuadrados o más, el ángulo que se formaría es mayor o igual que 360º, por lo oque tampoco nos sirve.

Pasamos al pentágono regular, cuyos ángulos interiores miden 108º. Si tomamos tres de ellos tendríamos un ángulo de 324º, que al ser menor que 360º nos da otro poliedro regular más, el dodecaedro:

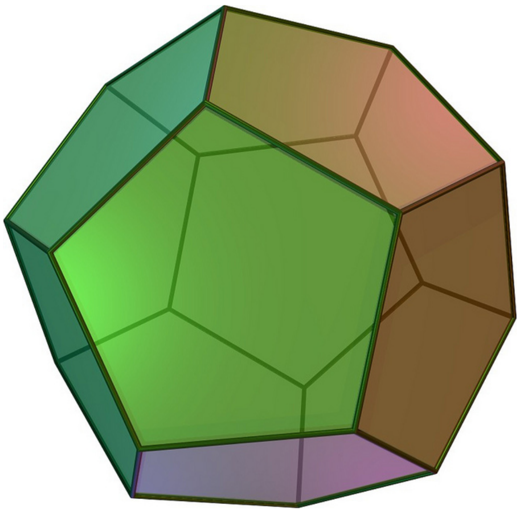


Figura 8: Dodecaedro

Si tomamos cuatro o más pentágonos tendríamos un ángulo mayor que 360º.

Siguiente opción, el hexágono regular, en el que los ángulos miden 120º. Tomando tres de ellos ya tendríamos un ángulo de 360º, hecho que descarta la posibilidad de que se pueda construir un poliedro regular convexo con hexágonos.

Y de aquí en adelante la situación es análoga. Con cualquier polígono regular con más de seis lados se tiene que al juntar tres de ellos iguales el ángulo formado es mayor que 360º, por lo que no se puede construir un poliedro regular con ellos. Tenemos así demostrado que solamente existen cinco poliedros regulares convexos.

4. Teorema de Euler para poliedros

Un poliedro se dice convexo si al unir dos cualesquiera de sus puntos el segmento que determinan está contenido en el poliedro. Por ejemplo, un cubo es un poliedro convexo.

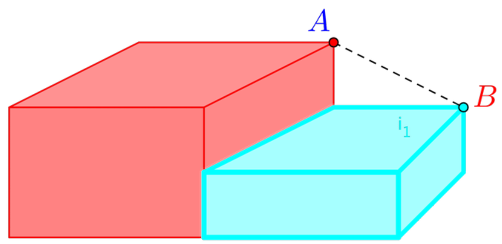


Figura 9: Poliedro no convexo, el segmento $\overline{AB}$ no está incluido en el poliedro

Teorema 1 *En todo poliedro convexo, denotemos por C al número de caras, V al número de vértices y A al número de aristas. Entonces se verifica la relación $C + V = A + 2$*

Demostración

Esta demostración se debe a Cauchy. Vamos a seguir el desarrollo de la pueba con un prisma recto, no perdemos generalidad puesto que lo mismo ocurriría con cualquier poliedro convexo.Eliminemos una de las caras del poliedro (por ejemplo en el prisma la base superior)y el resto de las caras las llevamos a un plano tal como indica la figura 10.

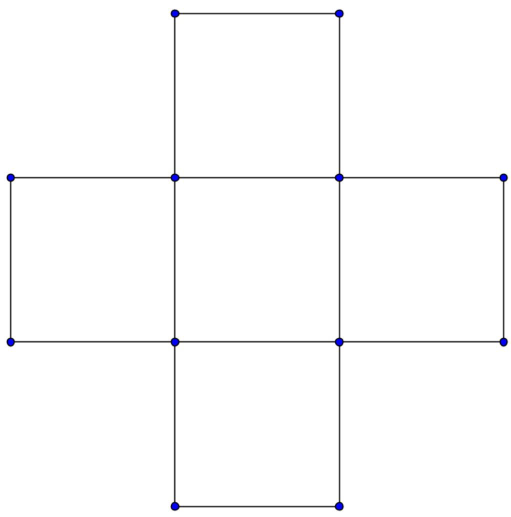


Figura 10: Eliminación de una de las caras desplegando las restantes sobre un plano

Dividimos en triángulos las caras trazando sucesivamente diagonales en las caras tal y como indicamos en la figura 11. A continuación vamos a eliminar los lados exteriores de los triángulos como indicamos en la figura. Este proceso lo vamos a riterar hasta que nos quede un único triángulo. Inicialmente queremos probar que $C + V = A + 2$. Como hemos eliminado una cara para desplegar la figura en el plano, la anterior relación en el espacio es equivalente a probar que en el plano se verifica $C + V = A + 1$, si demostramos esta relación en la figura desplegada en el plano estará demostrado el teorema. Llamamos C^i, V^i A^i al número de caras, vértices y aristas, respectivamente, que hay en la iteración i. Cada vez que creamos un triángulo en la iteración 1 aumentamos una cara, un vértice y dos aristas, es decir $C^1 = C + 1$, $V^1 = v + 1$ $A^1 = A + 2$,

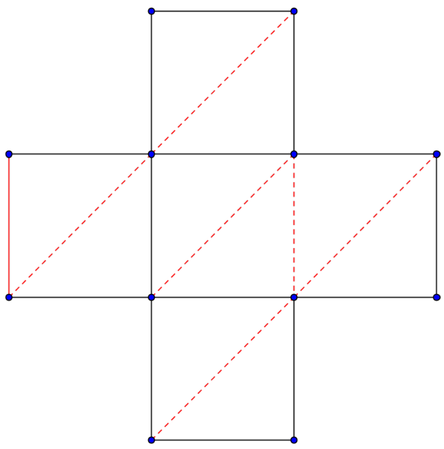


Figura 11: Division en triangulos de la figura

la expresión $C + V = A + 1$ es equivalente a $C^1 + V^1 = A^1 + 1$. Lo mismo podemos decir para cada iteración i

Cada vez que eliminamos los lados exteriores de un triángulo disminuimos una cara, un vértice y dos aristas por lo que sigue siendo válida la expresión $C + V = A + 1$. Resumiendo, hemos demostrado que la expresión $C+V = A+1$ es invariante frente a cualquier transformación dada en una iteración. Cuando lleguemos al final del proceso nos quedamos con un triángulo en donde $C = 1,\ V = 3\ y\ A = 1$ en donde se verifica, evidentemente $C + V = A + 1$, por equivalencia esta expresión vale también para la figura desplegada en el plano y por ende se verifica, para el poliedro, que $C + V = A + 2$

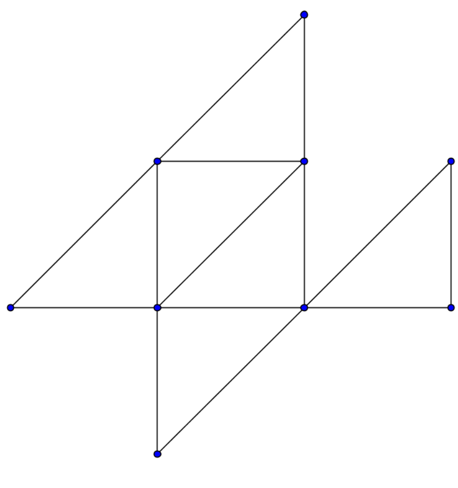


Figura 12: Eliminación de los lados exteriores de los triángulos

5. Poliedros semirregulares

Son aquellos poliedros cuyas caras están formadas por dos o mas polígonos regulares y ademas, en cada vértice concurren los mismos polígonos. Son poliedros semirregulares los que indican estas figuras:

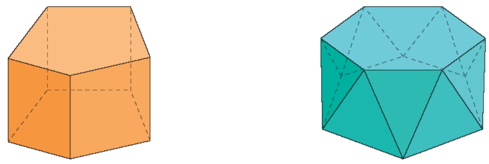


Figura 13: Poliedros semirregulares

La siguiente figura no corresponde a un poliedro semirregular:

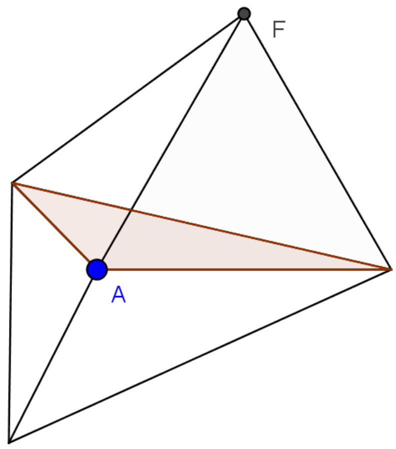


Figura 14: Poliedro que no es semirregular

La razón es que, si bien podemos suponer que todas las aristas son iguales (no se aprecia por la perspectiva), en el vértice A concurren 4 polígonos, mientras en el F concurren tan solo tres polígonos.

En todo poliedro semirregular las aristas tienen la misma longitud, ello se debe a que los distintos polígonos regulares que forman sus caras comparten al menos una arista.

6. Poliedros duales o conjugados

Dos poliedros son conjugados o duales si uno de ellos se obtiene uniendo los baricentros (los centros de los polígonos) de los polígonos que forman sus caras. Si los poliedros P_1 y P_2 son duales entonces número de caras de P_1 = número de vértices de P_2, esto es evidente. Otra propiedad de los poliedros duales es que, si P_1 es dual de P_2 entonces P_2 es dual de P_1. Además, si los poliedros P_1 y P_2 son duales han de tener el mismo número de aristas. Veamos esto, construimos la siguiente tabla:

Poliedro	Caras	Vértices	Aristas
P_1	C_1	V_1	A_1
P_2	V_1	C_1	A_2

Si aplicamos el Teorema de Euler para poliedros $C_1 + V_1 = A_1 = A_2$, es decir los poliedros P_1 y P_2 tienen el mismo número de aristas

a) El tetraedro es un poliedro autodual (es dual de sí mismo).

b) El hexaedro (cubo) y el octaedro son duales uno del otro.

C El dodecaedro y el icosaedro son duales uno del otro.

La siguiente tabla resume los elementos de los poliedros regulares:

Poliedro	Caras	Vértices	Aristas
Tetraedro	4	4	6
Hexaedro(Cubo)	6	8	12
Octaedro	8	6	12
Dodecaedro	12	20	30
Icosaedro	20	12	30

7. Truncamiento de Poliedros

Truncar un poliedro significa cortar sus vértices (o sus aristas). A modo de ejemplo, cortaremos los vértices de algunos poliedros para obtener otros. Si cortamos los vértices de los 5 Sólidos Platónicos (poliedros regulares) obtenemos los Sólidos Arquimedianos (poliedros semirregulares)

Si cortamos los vertices de un hexaedro por un plano que pasa por el punto medio de las caras tres caras que convergen en ese vértice, obtenemos un poliedro semirregular llamado cuboctaedro, cuya forma la muestra la suiente figura:

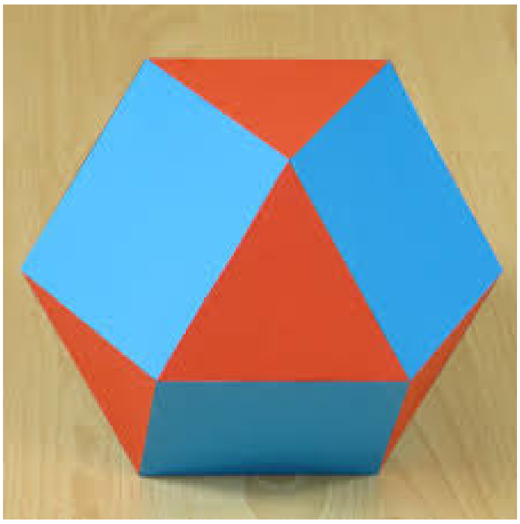


Figura 15: Cuboctaedro

Se trata de un poliedro semirregular que tiene 6 caras cuadradas (una por cada cara del hexaedro), 8 caras triángulares (una por cada vértice del hexaedro).

Podríamos hacer, de manera análoga, un truncamiento del dodecaedro, cortando por un plano que pasa por el punto de las aristas que convergen en un vértice. Obtenemos un poliedro semirregular llamado icosidodecaedro que tiene 12 caras pentagonales (una por cada cara del dodecaedro, 20 caras triángulares (una por cada vértice del dodecaedro). La forma de esta figura la muestra la suiente figura:

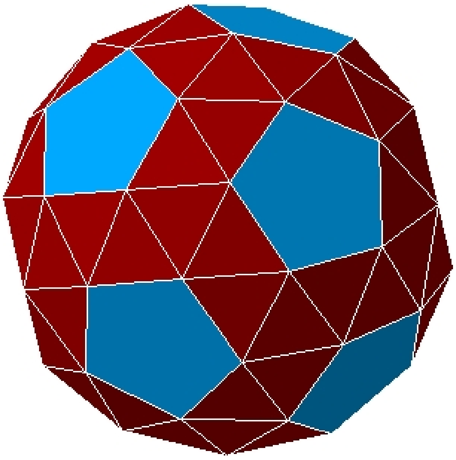


Figura 16: Icosidodecaedro

Tanto en el cuboctaedro como en el icosidodecaedro hemos cortado los vértices por planos que pasan por el punto medio de las aristas que concurren en un vértice. si estos planos pasaran por puntos simétricos, que no pasaran por el punto medio de la arista, obtendríamos un cubo truncado con 6 caras octogonales y 8 caras triángulares tal y como muestra la siguiente figura:

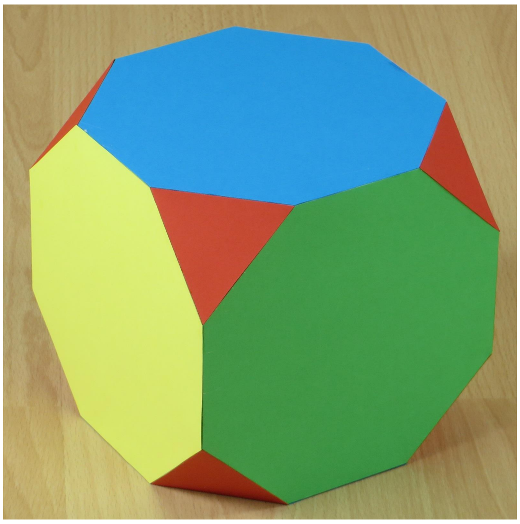


Figura 17: Cubo truncado

8. Plano de simetría en poliedros

Un plano de simetría en un poliedro es aquel plano que divide al poliedro en dos partes iguales. Esto puede tener la ventaja de que, al querer estudiar la figura, nos baste con la mitad de esta figura. Si queremos hallar los planos de simetría de un tetraedro, por ejemplo, debemos tener en cuenta que los planos de simetría de este poliedro contienen a una arista y al baricentro de la cara que no contiene a la mencionada arista. Al tener 6 aristas el tetraedro tiene 6 planos de simetría (uno por cada arista).

Si se trata de hallar los planos de simetría de, por ejemplo, un prisma hexagonal, cualquier plano que pase por los puntos medios de lados opuestos de la base, y perpendicular a la base, es plano de simetría. También es plano de simetría el plano paralelo a la base que pase por el centro del prisma hexagonal.Tiene por tanto 4 planos de simetría.

9. Eje de giro de orden n de un poliedro

El eje de giro de orden n de un poliedro es una resta de modo que, al girar el poliedro en torno a esta recta ocupa la misma posición n veces. Por ejemplo la recta que une un vértice del tetraedro con el baricentro de la cara opuesta al vértice, es un eje de giro de orden 3 tal y como muestra la figura:

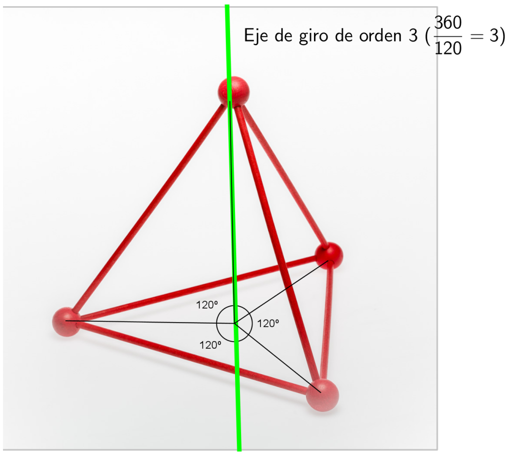


Figura 18: Eje de giro

En un tetraedro hay tantos ejes de giro como vértices, es decir, 4 ejes de giro de orden 3.

10. Área lateral y total del cono

Me sorprende que en la página 198 se ponga que el área lateral del cono que muestra la figura:

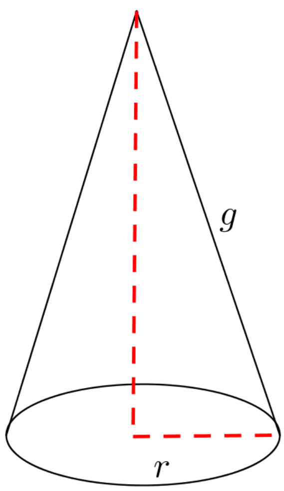
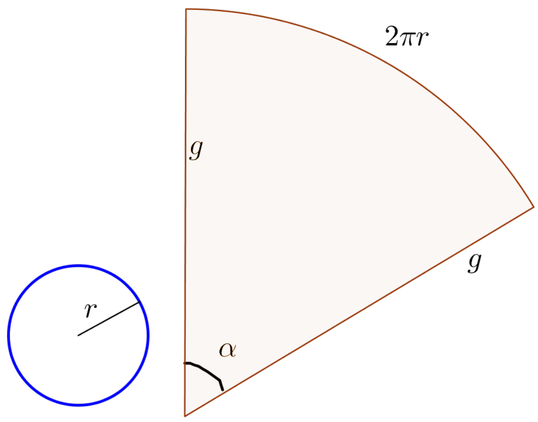


Figura 19: Cono de revolución

$A_{LATERAL} = \pi r g$, mientras el área total es $A_{TOTAL} = \pi r g + \pi r^2$. Y aquí se acabó la historia, a repetir la fórmula con muchísimos ejercicios para memorizar mejor las recetas algorítmicas. Esto no sirve para nada. Admitiendo que haya alumnos que no consigan entender la demostración, hay que hacerla por dos motivos: 1º todos sabrán que las matemáticas se caracterizan por utilizar razonamientos que justifican el porqué de sus aseveraciones, y 2º los alumnos que entiendan la demostración disfrutarán las matemáticas. ¿Es realmente difícil la demostración? No, la hago a modo de ejemplo. El desarrollo del cono es:



El que corresponde al área lateral es un sector circular de radio g. Sabemos que la función que nos da el área de un sector circular es una función de proporcionalidad directa (odio la regla de tres porque este algoritmo no es significativao al no aportar nada al conocimiento, por ahí también se puede hacer el desarrollo), que dependerá de la longitud del arco, es decir será de la forma $\boxed{Superficie = k \cdot\ Longitud\ del\ arco}$ siendo k una constante. Si la longitud del arco es $2\pi g$ el área es πg^2. Si sustituimos en la función anterior $\cancel{\pi} g^{\cancel{2}} = k2\cancel{\pi}\cancel{g}$, es decir que $k = \frac{g}{2}$. Entonces la superficie que corresponde a una longitud de arco $2\pi r$ es $A_{LATERAL} = \frac{g}{\cancel{2}}\cancel{2}\pi r = \pi r g$. Es obvio que el área total es el área lateral + el área del círculo de radio r, es decir $A_{TOTAL} = \pi r g + \pi r^2$.

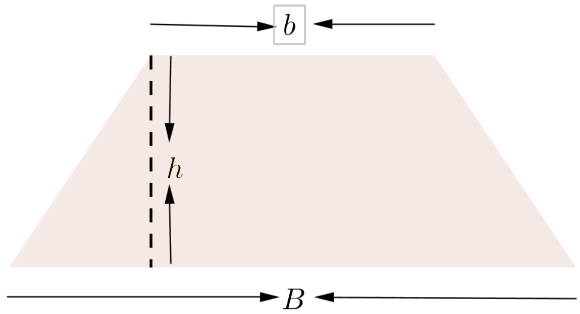
11. Área lateral y total del tronco de cono

En la página 199 se ponen otro par de fórmulas para calcular el área lateral y total de un tronco de cono, como es de esperar, sin demostrar nada a modo de dogma de fe. ¿Por qué no se dan más ideas y menos cuentas demostrando las fórmulas? Hay una obsesión por parte de los autores del texto en calcular aportando un montón de ejercicios, y de nuevo afirmo que la repetición no es equivalente a la adquisición de conocimiento, se pueden hacer cientos y cientos de ejercicios para el cálculo de áreas y volúmenes y no tener ni idea de lo que se está haciendo. A modo de ejemplo propongo una demostración para el área lateral y total del tronco de cono. En primer lugar veamos como calcular el área de un trapecio isósceles.

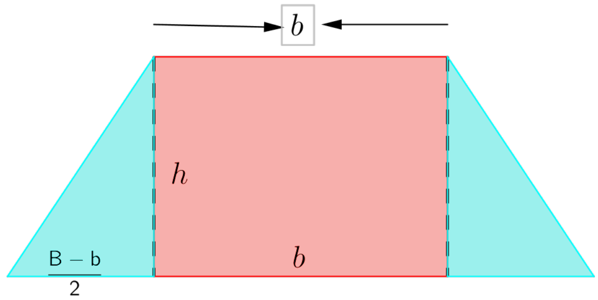
Lema 2 *(Área de un trapecio)Sea el trapecio isósceles que se muestra en la figura, de bases mayor y menor, respectivamente, B y b, y de altura h:*

Entonces su área viene dada por la expresión $A = \frac{(B+b)h}{2}$

Demostración



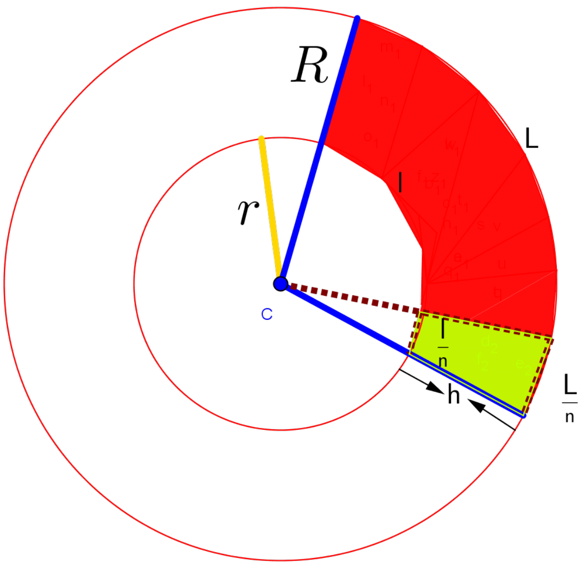
El trapecio se puede descomponer en un rectángulo cuyos lados tienen longitud b y h, y en dos tríángulos rectángulos de catetos $\dfrac{B-b}{2}$ y h tal y como muestra la figura



Si sumamos las áreas de estas tres figuras obtendremos la superficie del trapecio

$$A = bh + \cancel{2}\frac{\frac{B-b}{2}h}{\cancel{2}} = bh + \frac{B-b}{2}h = bh + \frac{Bh-bh}{2} = \frac{2bh+Bh-bh}{2} = \frac{(B+b)h}{2}$$

Un trapecio circular es la porción de corona circular comprendida entre dos radios, como indica la parte de la figura coloreada en rojo.

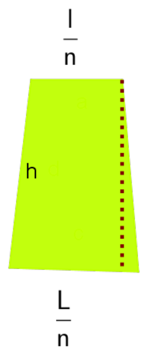


Lema 3 *(área de un trapecio circular) Sea un trapecio circular cuyo arco superior tiene una longitud L, siendo l la longitud de su arco menor y h la distancia entre los puntos de intersección del radio mayor con los arcos, tal como se muestra en la figura anterior. Entonces su área*

viene dada por la expresión $A = \dfrac{L+l}{2}h$

Demostración

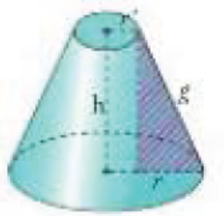
Empleamos el método de exhaución de Arquímedes, dividimos en n partes (n muy grande, próximo a infinito) las longitudes de los arcos L y l, obteniendo trapecios como muestra la figura a continuación:



En este trapecio h y la altura del mismo son prácticamente iguales (si n es próximo a infinito). El área de cada uno de estos trapecios es $\dfrac{\frac{L}{n}+\frac{l}{n}}{2}h = \dfrac{L+l}{2n}h$. Como hay n trapecios de esta forma, cuya suma de superficies coincide con el área del trapecio circular, entonces el área de este vale $A = \cancel{n}\dfrac{L+l}{2\cancel{n}}h = \dfrac{(L+l)h}{2}$

El libro de Matemáticas 3º ESO Anaya opción B dice esto al respecto del tronco de cono esto, y solo esto:

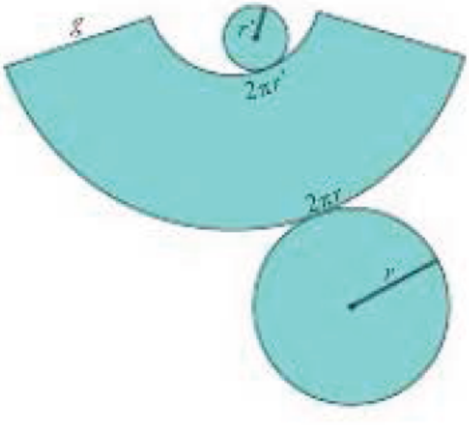
Es muy curioso que los autores del texto digan que el área lateral de un tronco de cono recuerda al área de un trapecio, ¿Regla nemotécnica para ayudar a la memoria? **Este raquítico contenido** se puede enriquecer con la demostración del área del trapecio circular dada anteriormente, basta sustituir $L = 2\pi R$, $l = 2\pi r$ y $h = g$. No me extraña, con esta exposición que los alumnos no solo no aprendan matemáticas sino que las aborrezcan.



En un tronco de cono, la altura, h, la diferencia de los radios, $r - r'$, y la generatriz, g, forman un triángulo rectángulo. Por tanto:

$$g^2 = \mathrm{h}^2 + (r - r')^2$$

La fórmula para el cálculo del área lateral de un tronco de cono recuerda la del área de un trapecio. Observa:

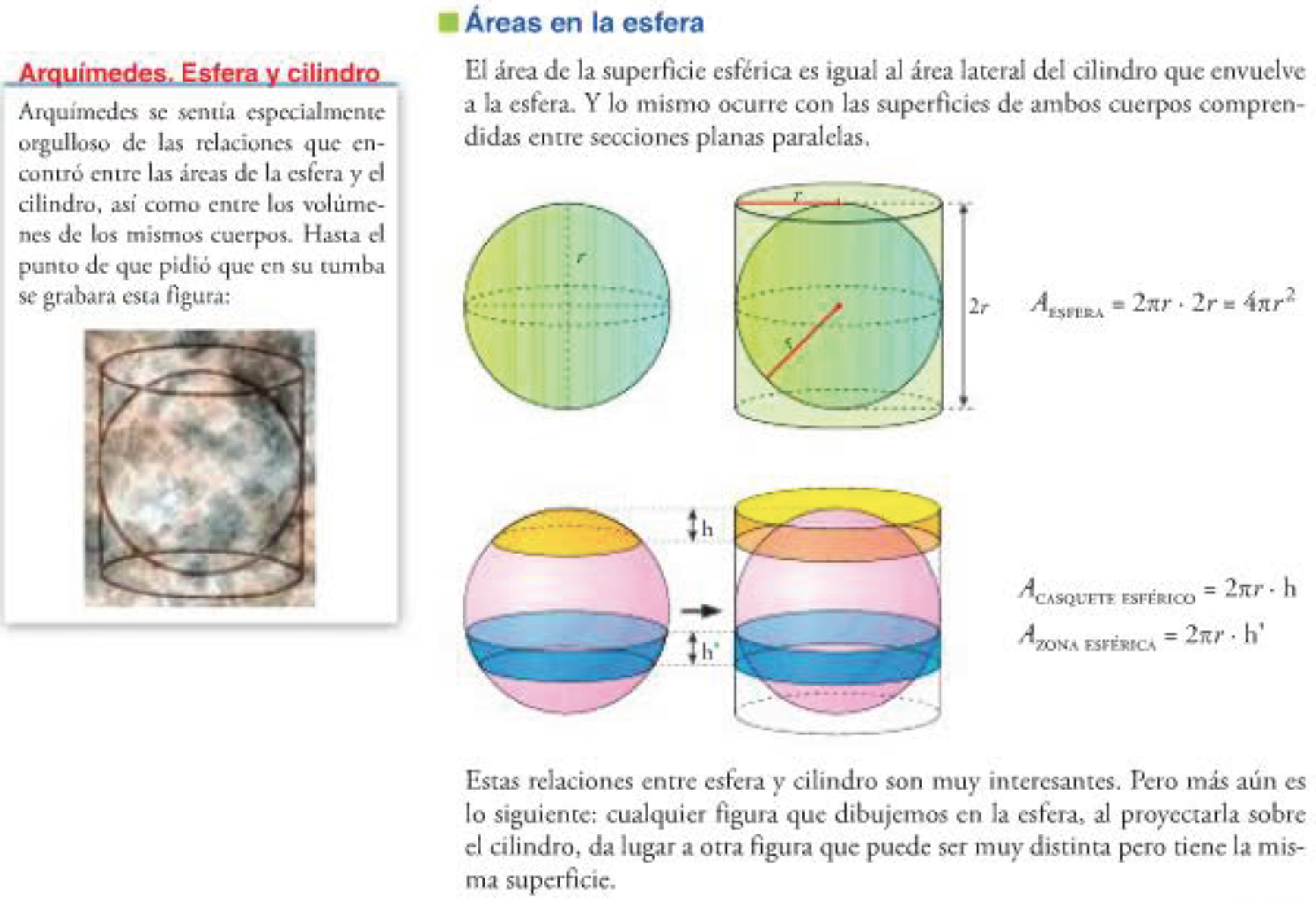


$$A_{\text{LATERAL}} = \frac{2\pi r + 2\pi r'}{2} \cdot g = \pi(r + r')g$$

$$A_{\text{TOTAL}} = \pi(r + r')g + \pi r^2 + \pi r'^2$$

12. Área de la esfera

En la página 199 del libro de texto Matemáticas Anaya opción B se lee:



Arquímedes. Esfera y cilindro

Arquímedes se sentía especialmente orgulloso de las relaciones que encontró entre las áreas de la esfera y el cilindro, así como entre los volúmenes de los mismos cuerpos. Hasta el punto de que pidió que en su tumba se grabara esta figura:

Áreas en la esfera

El área de la superficie esférica es igual al área lateral del cilindro que envuelve a la esfera. Y lo mismo ocurre con las superficies de ambos cuerpos comprendidas entre secciones planas paralelas.

$A_{\text{ESFERA}} = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2$

$A_{\text{CASQUETE ESFÉRICO}} = 2\pi r \cdot h$

$A_{\text{ZONA ESFÉRICA}} = 2\pi r \cdot h'$

Estas relaciones entre esfera y cilindro son muy interesantes. Pero más aún es lo siguiente: cualquier figura que dibujemos en la esfera, al proyectarla sobre el cilindro, da lugar a otra figura que puede ser muy distinta pero tiene la misma superficie.

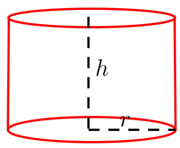
Figura 20: área de la esfera

El texto no pasa de ser una declaración de intenciones, se puede demostrar que el área de una esfera de radio R es $A = 4\pi R^2$ de forma rigurosa y no es muy dificil.

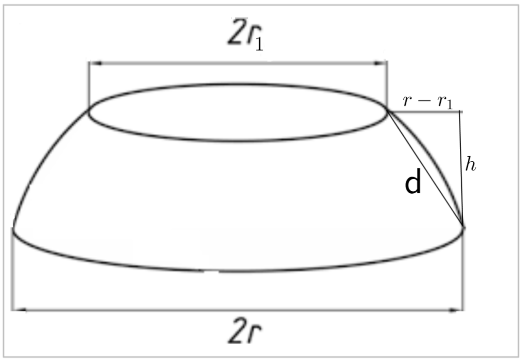
Proposición 4 *Supongamos una esfera de radio r inscrita en un cilindro de radio r y altura 2r. Cortemos esta configuración de cilindro y esfera por dos planos paralelos a la base del cilindro y separados por una altura infinitesimal h. Entonces las área de la superficie de corte del cilindro y la esfera son iguales.*

<u>**Demostración**</u>

El corte que producen estos dos planos sobre el cilindro es un nuevo cilindro de radio r y altura h, cuya superficie es $A = 2\pi rh$



En la esfera el corte con los dos planos nos daría una zona esférica como la que muestra la figura:



Según el teorema de Pitágoras $d = \sqrt{(r-r_1)^2 + h^2}$, el área de este trapecio circular es $\dfrac{(2\pi r_1 + 2\pi r)\sqrt{(r-r_1)^2+h^2}}{2} = (\pi r_1 + \pi r)\sqrt{(r-r_1)^2+h^2}$. Si la altura h es infinitesimal, entonces $r_1 \simeq r \Rightarrow r - r_1 = 0$, nos queda entonces que el área es $A = (\pi r + \pi r)\sqrt{h^2} = 2\pi rh$

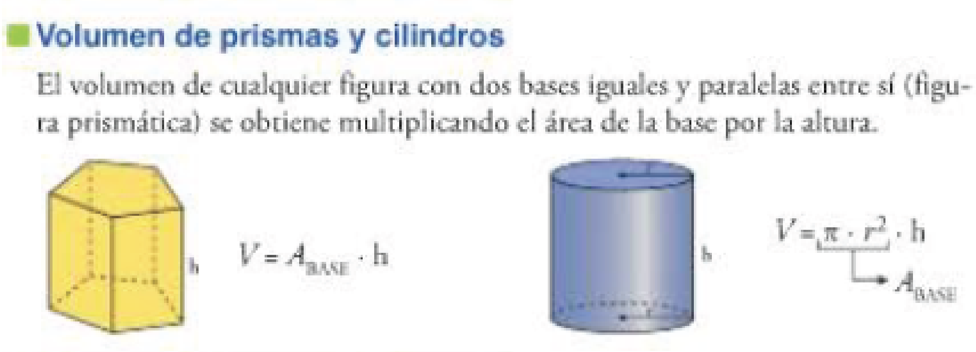
Teorema 5 *La superficie de una esfera de radio r viene dada por la expresión* $A = 4\pi r^2$

<u>**Demostración**</u>

Empleamos el método de exhaución de Arquímedes e inscribimos la esfera de radio r en un cilindro de radio r y altura 2r. El área de la esfera la podemos obtener como suma de las superficies de trapecios circulares de altura infinitesimal en que dividimos la superficie esférica siguiendo el modelo de la proposición anterior. El número de trapecios al que nos hemos referido será grandísimo. Como cada uno de estos trapecios tiene la misma superficie que su respectiva porción de cilindro según hemos visto anteriormente, la suma de estos trapecios coincide con la superficie lateral del cilindro que será $A = 2\pi r 2r = 4\pi r^2$

13. Volumen de un prisma y de un cilindro

En la página 202 del libro Matemáticas 3º ESO opción B de Anaya se comienza el estudio de los volumenes de cuerpos geométricos (así lo llama). Sobre los prismas se dice esto y solo esto:


Volumen de prismas y cilindros

El volumen de cualquier figura con dos bases iguales y paralelas entre sí (figura prismática) se obtiene multiplicando el área de la base por la altura.

Figura 21: Volumen del prisma y el cilindro

Como siempre, después del par de recetas una gran lista de problemas y a repetir y repetir. Demostremos que el área del prisma pentagonal que se exhibe en amarillo es efectivamente el área de la base por la altura. Una vez establecida la unidad de volumen, que da igual la que sea: un cubo de determinada arista, un tetraedro de arista a, etc, llamemos 1 a esta unidad de volumen. Si cortamos por un plano paralelo a la base del prisma, sea x el número real tal que $1(unidad\ de\ volumen) = A_{base} \cdot x \Rightarrow x = \dfrac{1}{A_{base}}$. Esto lo podemos hacer ya que al cortar el prisma por cualquier plano paralelo a la base siempre obtenemos una intersección con área A_{base}. Si V es el volumen del prisma denotará el número de veces que su altura h contiene a x, es decir $V = \dfrac{h}{x} \Rightarrow V = \dfrac{h}{\dfrac{1}{A_{base}}} \Rightarrow V = A_{base} \cdot h$

Sabemos que el cilindro es un prisma recto con base un polígono regular con infinitos lados. Así que para el cilindro también es válida la fórmula $V = A_{base} \cdot h$. Pero la base del cilindro es un polígono regular con infinitos lados, es decir un círculo cuya área es $A_{base} = \pi r^2$. Sustituyendo este valor tenemos que el volumen del cono es $V = \pi r^2 h$

14. Volumen de una pirámide y un cono

En la página 202 del libro de texto al que nos referimos , respecto al volumen de pirámides y conos se lee lo siguiente:

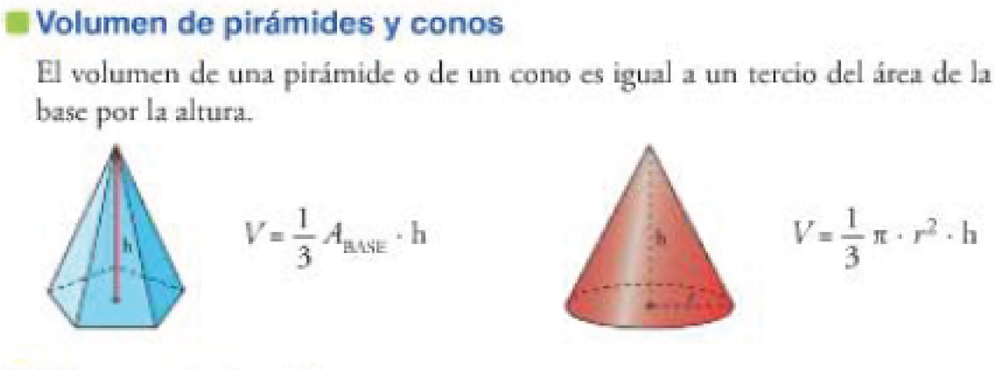


Figura 22: Volumen de la pirámide y el cono

Vamos a aportar un poco de conocimiento demostrando estas fórmulas. Consideremos una pirámide por ejemplo con base rectangular y altura h. En un prisma recto con la misma base de la pirámide y altura 2h caben 6 pirámides como esta tal y como intentamos explicar en la figura siguiente:

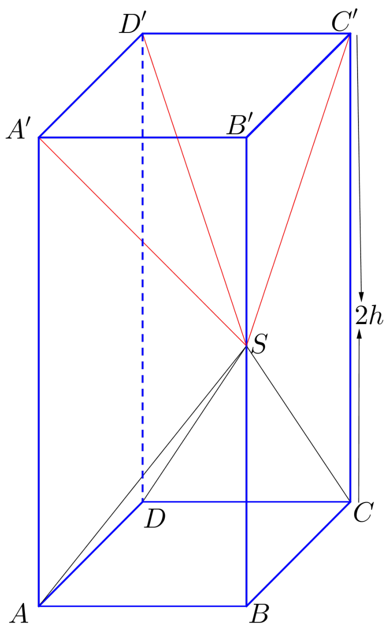


Figura 23: Volumen de la pirámide y el cono

El volumen del prisma es 6 veces el volumen de la pirámide . Sabemos que $V_{prisma} =$
$= A_{base} 2h = 6V_{pirámide} \Rightarrow V_{pirámide} = \dfrac{2}{6} A_{base} h = \dfrac{1}{3} A_{base} h$

Podemos considerar que un cono es una pirámide cuya bade es un polígono regular con infinitos lados. Ese polígono regular con infinitos lados que compone la base es un círculo de radio r, por tanto $A_{base} = \pi r^2$ y sustituyendo este valor en la expresión del volumen de la pirámide queda $V_{cono} = \dfrac{1}{3} \pi r^2 h$

15. Volumen de un tronco de cono

Aunque en el texto no se da una fórmula para hallar el volumen de un tronco de cono, ni se nombra siquiera, vamos a obtener una expresión que nos hará falta para deducir el volumen de una esfera. Sea un tronco de cono de radios R y r y altura h, tal y como indica la figura siguiente:

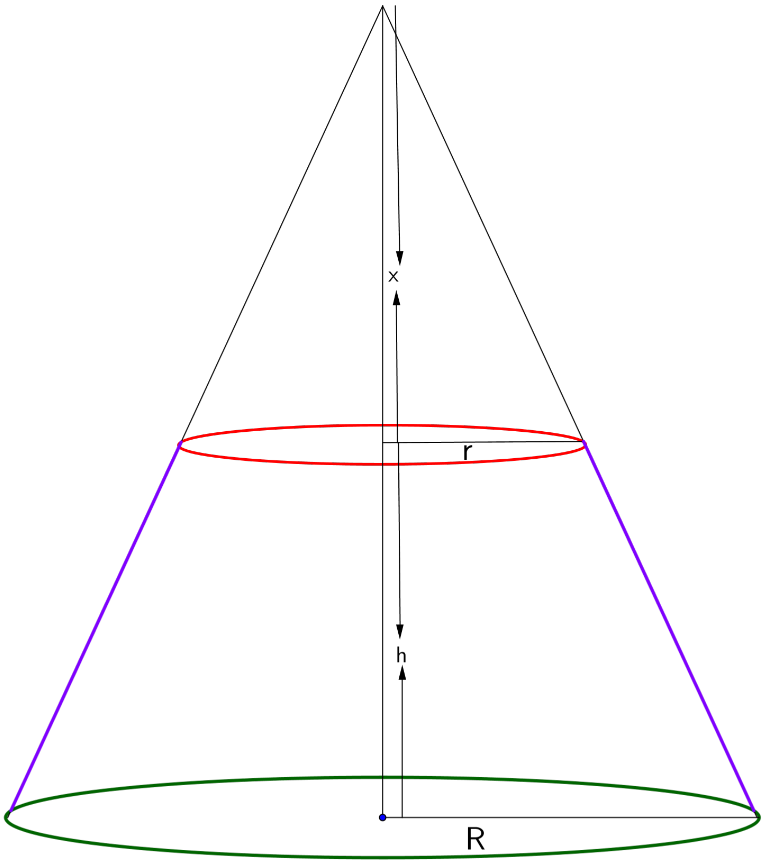


Figura 24: Tronco de cono

El volumen del tronco se obtiene como diferencia entre el volumendel cono de radio R y altura $h+x$ y el voluen del cono de radio r y altura x. No conocemos x pero por semejanza de triángulos se verifica $\frac{x}{r}=\frac{x+h}{R} \Rightarrow x(R-r)=rh \Rightarrow \boxed{x=\frac{rh}{R-r}}$

El volumen del tronco será $\frac{1}{3}V=\frac{1}{3}\pi R^2(h+x)-\frac{1}{3}\pi r^2 x$. Como $h+x=h+\frac{rh}{R-r}=$ $=\frac{hR-\cancel{hr}+\cancel{hr}}{R-r}=\frac{hR}{R-r}$, se tiene que $V=\frac{1}{3}\pi R^2\frac{hR}{R-r}-\frac{1}{3}\pi r^2\frac{hr}{R-r}=\frac{1}{3}\pi\frac{hR^3-hr^3}{R-r}=$ $=\frac{1}{3}\pi h\frac{R^3-r^3}{R-r}=\frac{1}{3}\pi h(R^2+r^2+Rr)$ Resumiendo, el volumen del tronco de cono es $\boxed{\frac{1}{3}\pi h(R^2+r^2+Rr)}$

16. Transformaciones isométricas en el plano

Son movimientos que conservan la forma de la figura y el tamaño de la misma. Entre las isometrías las más importantes son las **traslaciones**, las **simetrías axiales**, las **simetrías centrales** y los **giros**.

16.1. Traslaciones

Denotemos al plano como $\mathbb{R}^2 = \{x, y) \ / \ x, y \in \mathbb{R}\}$. Una traslación de vector $\vec{v} = (a, b)$ es una aplicación $T_{\vec{v}} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T_{\vec{v}}(x, y) = (a, b) + (x, y) = (a + x, b + y)$. Veamos un ejemplo, se trata de trasladar la figura F según el vector $\vec{v} = (-3, 2)$

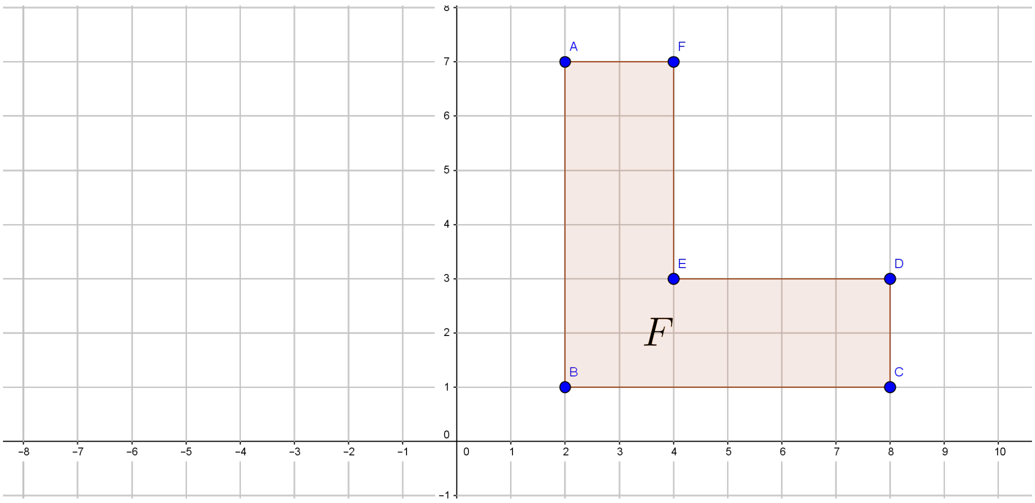


Figura 25: Traslación de la figura F

Con esta traslación lo que hacemos es llevar cada punto da la figura 3 lugares a la izquierda y dos lugares hacia arriba. La solución es (figura en amarillo):

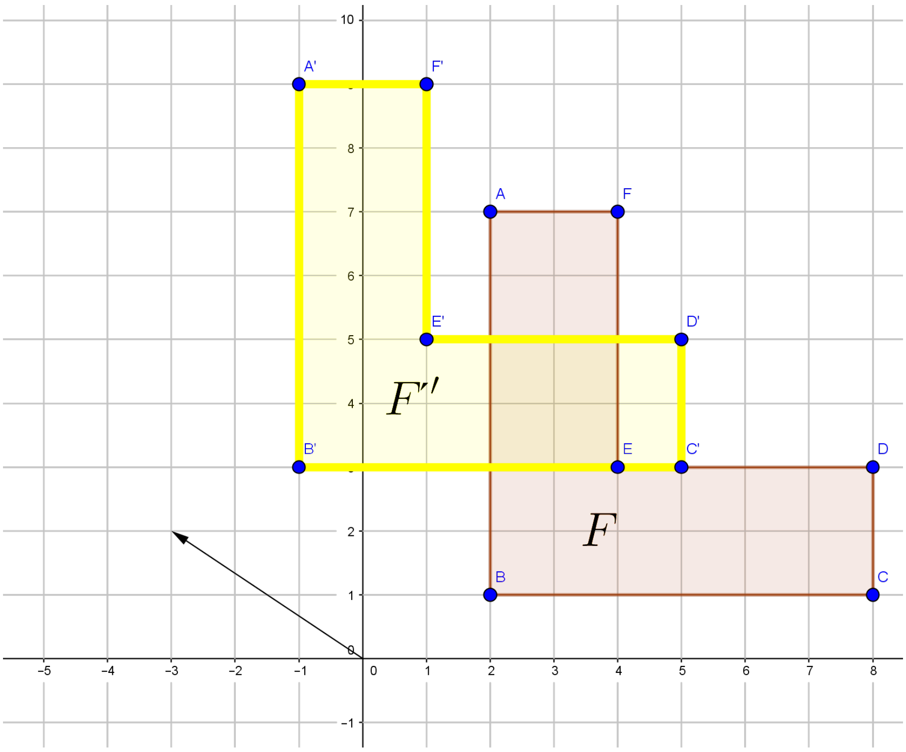


Figura 26: La traslación de la figura F es F'

16.2. Simetría axial

La mediatriz de un segmento es la perpendicular a él que pasa por su punto medio. Una simetría axial de eje r (r es una recta) es una aplicación en la forma $S_r : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $S_r(P) = Q$, verificándose que r es la mediatriz del segmento $\overline{PQ}$. A continuación se muestra la simetría axial de la figura ABCDEFG respecto al eje r (figura simétrica en rojo)

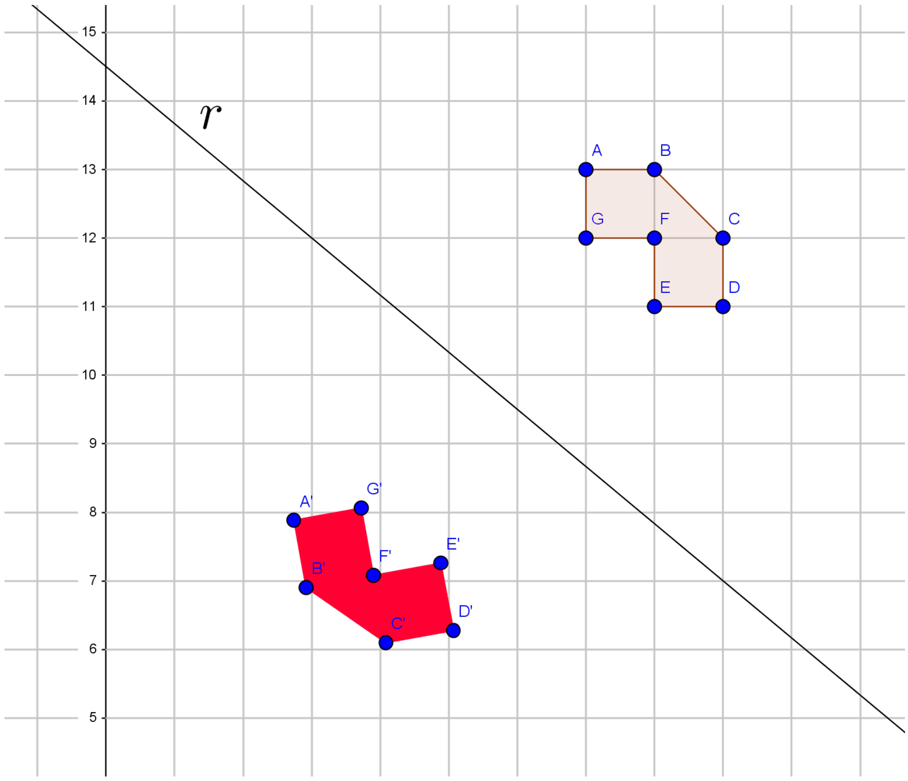


Figura 27: Simetría axial

Tal y como hemos definido la simetría axial, si un punto P pertenece al eje de simetría r no tendría su correspondiente S(P)=Q, ¡jamás podría ser r la mediatriz del segmento $\overline{PQ}$! Para que la simetría axial sea una función imponemos la condición de que S(P)=P $\forall\ p \in r$, es decir que los puntos del eje de simetría son invariantes de la simetría axial con ese eje.

16.3. Simetría central

La simetría central de centro O, es una aplicación en la forma $S_O : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $S_O(P) = Q$, verificándose que O es el punto medio del segmento $\overline{PQ}$. A continuación se muestra la simetría central de la figura ABCDEFG respecto al centro O (figura simétrica en rojo)

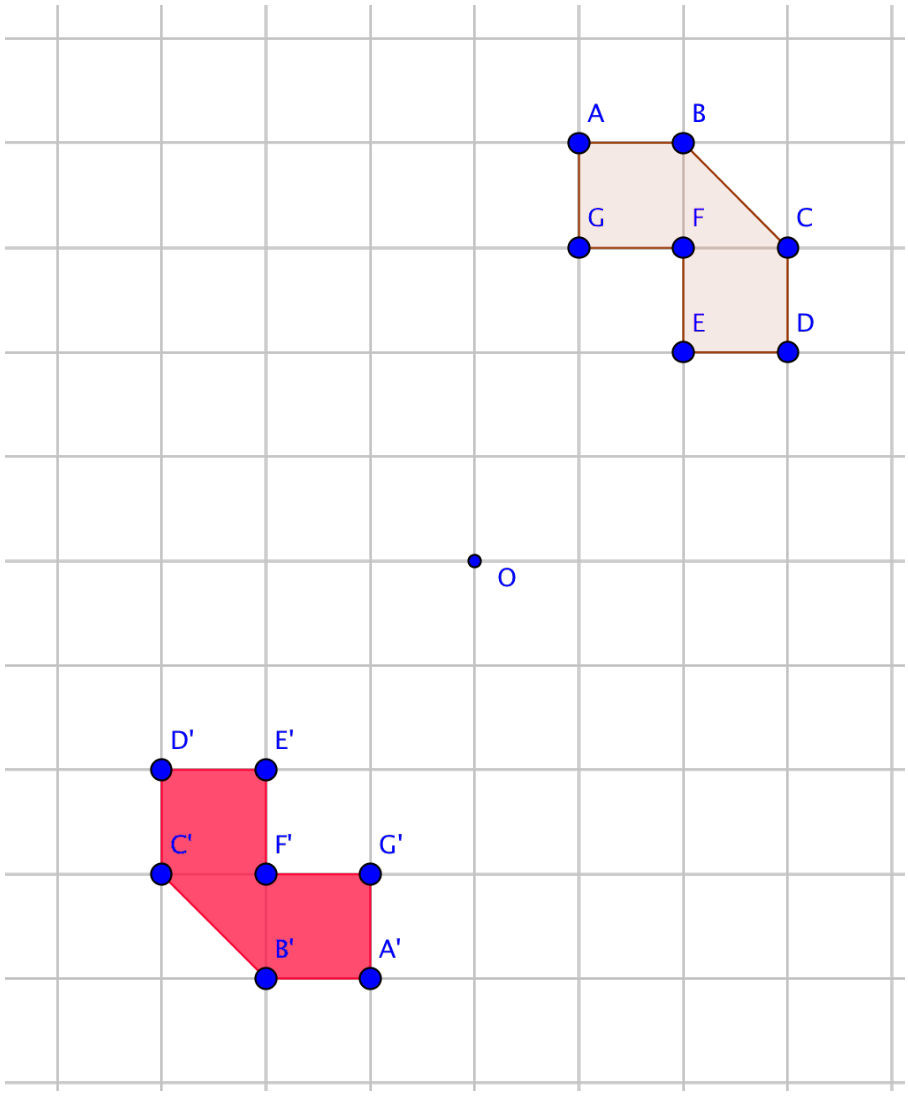


Figura 28: Simetría central

Observamos de nuevo que, tal y como se ha definido la simetría central, el centro de simetría O no tiene correspondiente. La simetría central S_O no sería función. Para que sí lo sea, imponemos la condición de que O sea invariante por la simetría central, es decir $S_O(O) = O$

16.4. Giros

Un giro de centro O y ángulo α es una función $G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $G(P) = Q$ de manera que la longitud del segmento de Extremos O,P, sea la misma que la del segmento de extremos O,Q. Además $\measuredangle\ (\overline{OP}, \overline{OQ}) = \alpha$. Si nos atenemos a la definición el centro O no tiene correspondiente, G no sería función. Para solucionar esto se define $G(O) = O$.

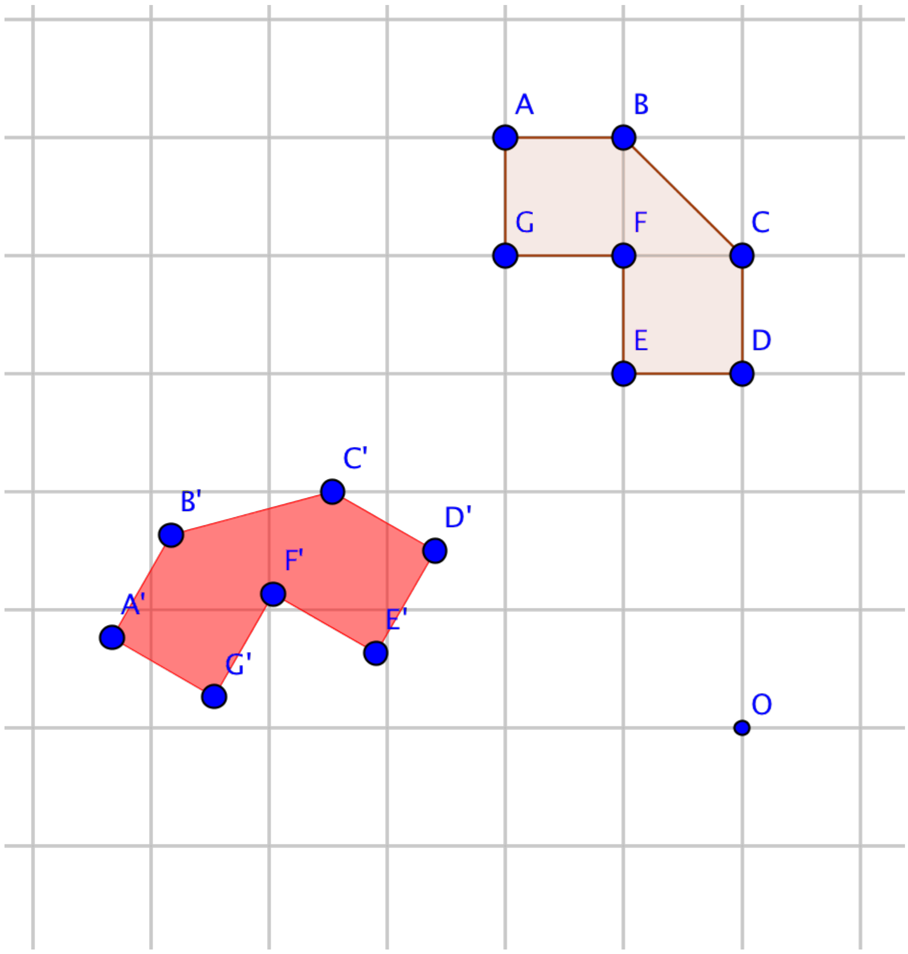


Figura 29: Giro de 60º

16.5. Hallar centro y ángulo de giro

Supongamos que mediante un giro, la figura ABCDEF se ha transformado en la figura A'B'C'D'E'F'. Queremos saber cuál es el centro de giro y qué ángulo se ha girado la figura. Hallamos las mediatrices m_1 del segmento AA' y m_2 del segmento BB' (estas rectas están en rojo). El punto de corte de estas dos rectas coincide con el centro de giro. Para Hallar el ángulo que se ha girado la figura, medimos el ángulo que forman las rectas OA y OA' tal y como se indica en la siguiente figura:

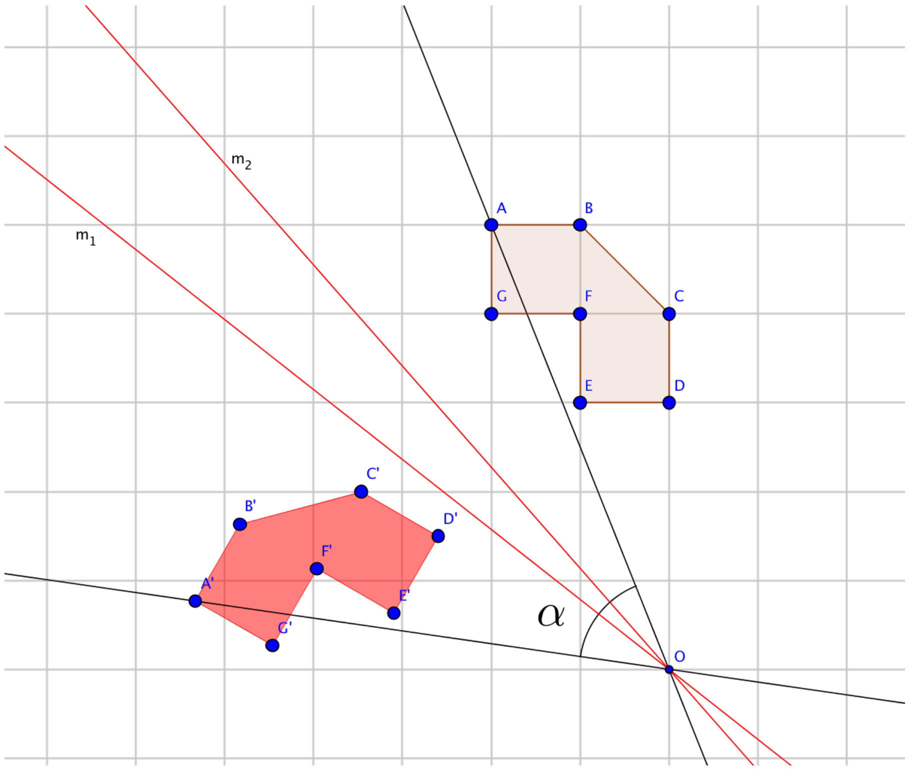


Figura 30: Centro y ángulo de giro