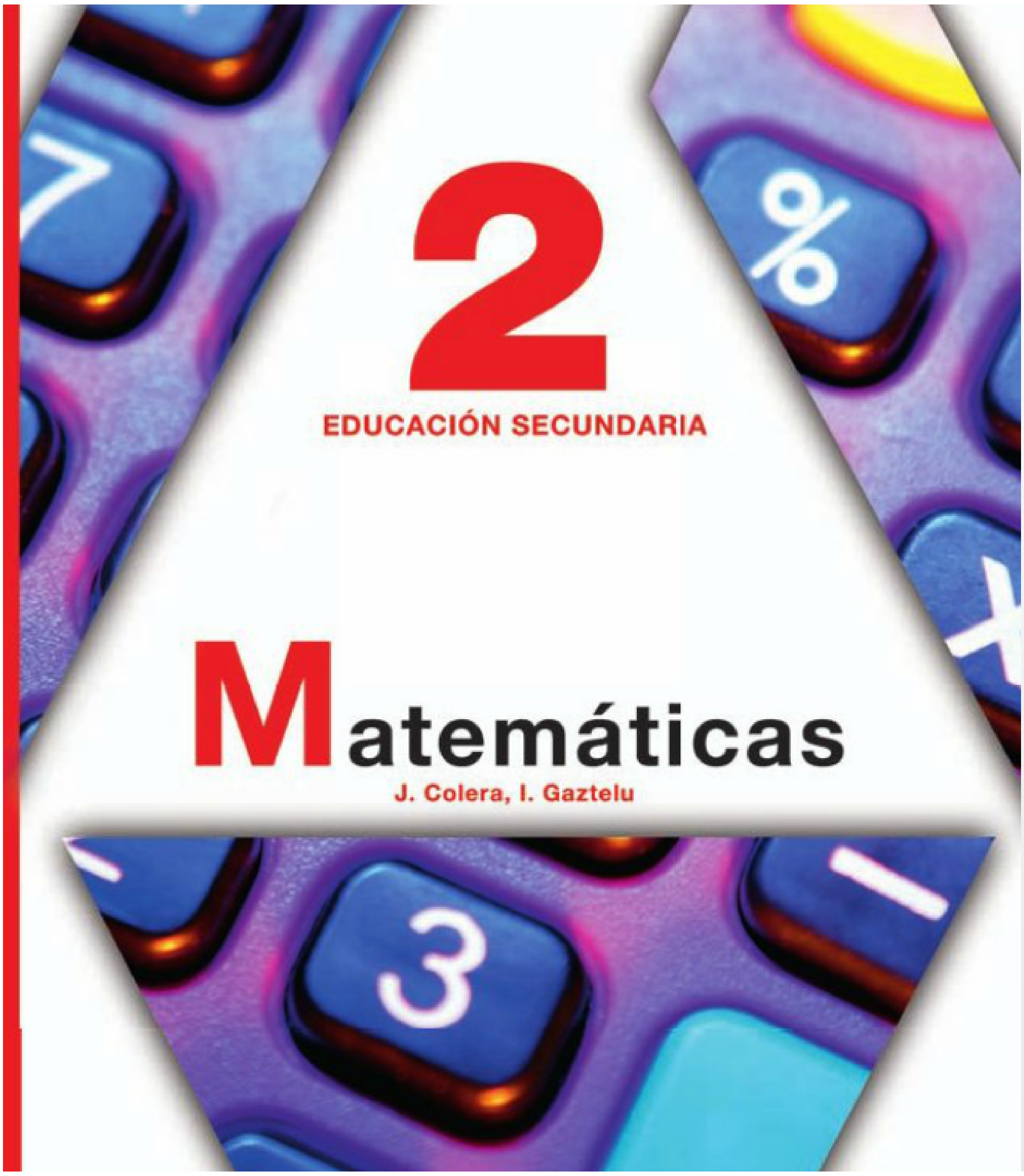
Cuerpos geométricos 2º ESO. Ejercicios de máxima dificultad

Miguel Galo Fernández



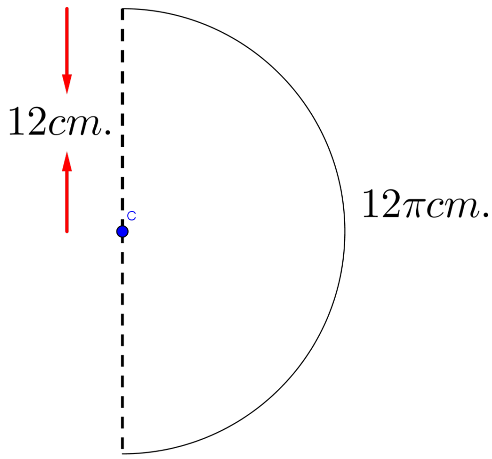
Índice de Contenidos

1. Ejercicio 37

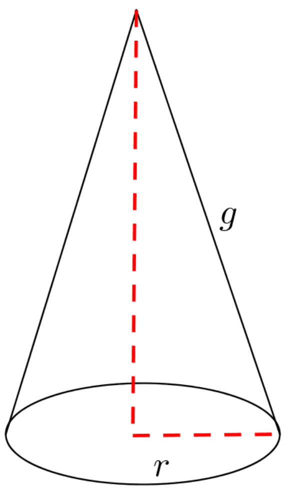
37 El desarrollo lateral de un cono es un semicírculo de radio 12 cm.
Halla el radio de su base y su altura.

Solución

Si nos fijamos en la figura:

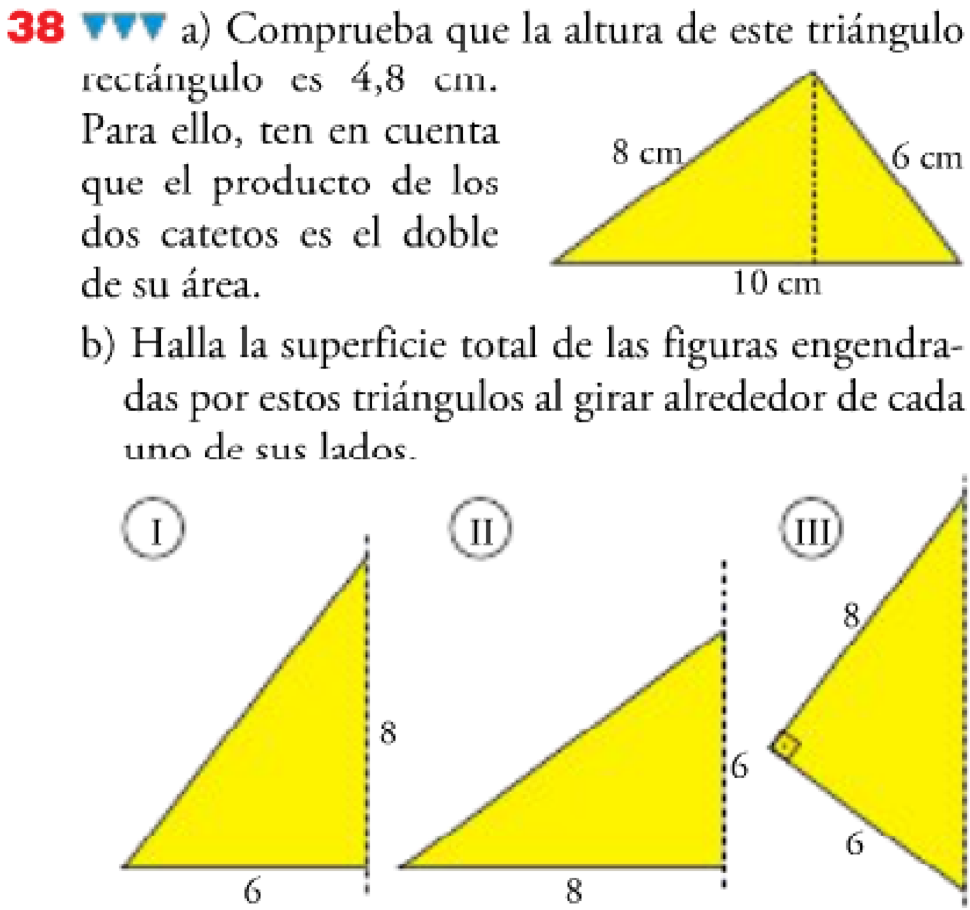


nos dicen que la generatriz del cono es $g = 12$. Como la circunferencia de radio 12 cm. tiene una longitud de 24π cm., la semicircunferencia tendrá una longitud de 12π cm. Si el cono de radio r es que representa la figura:



entonces $2\cancel{\pi}r = 12\cancel{\pi} \Rightarrow r = 6$ cm. La altura del cono es h y se cumple $h^2 + 6^2 = 12^2 \Rightarrow h^2 + 36 = 144 \Rightarrow h = \sqrt{128} = 11,31cm.$

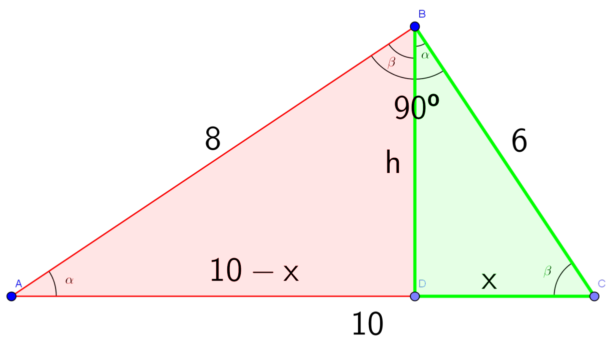
2. Ejercicio 38



38 a) Comprueba que la altura de este triángulo rectángulo es 4,8 cm. Para ello, ten en cuenta que el producto de los dos catetos es el doble de su área.

b) Halla la superficie total de las figuras engendradas por estos triángulos al girar alrededor de cada uno de sus lados.

Los triángulos rojo y verde son semejantes:



Por la semejanza entre los triángulos rojo y verde se verifica que $\dfrac{10-x}{h} = \dfrac{h}{x} \Rightarrow$ $h^2 = 10x - x^2$. Aplicando el Teorema de Pitágoras a los triángulos rojo y verde se obtiene:

$$\begin{cases} h^2 + (10-x)^2 = 8^2 \\ h^2 + x^2 = 6^2 \end{cases}$$

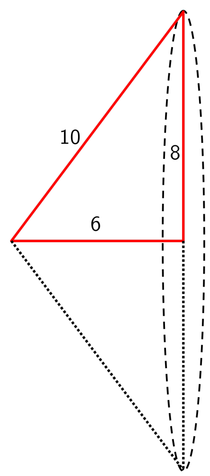
Sustituyendo el valor $h^2 = 10x - x^2$ en la primera ecuación de la llave tenemos que

$$10x - x^2 + (10-x)^2 = 64 \Rightarrow 10x - \cancel{x^2} + 100 - 20x + \cancel{x^2} = 64 \Rightarrow -10x = -36 \Rightarrow x = \frac{36}{10} = \frac{18}{5}$$

Si sustituimos el valor $x = \dfrac{18}{5}$ en la segunda ecuación de la llave obtenemos $h^2 + \left(\dfrac{18}{5}\right)^2 =$
$= 36 \Rightarrow h^2 = 36 - \dfrac{324}{25} = \dfrac{576}{25} \Rightarrow h = \sqrt{\dfrac{576}{25}} = \dfrac{24}{5}$

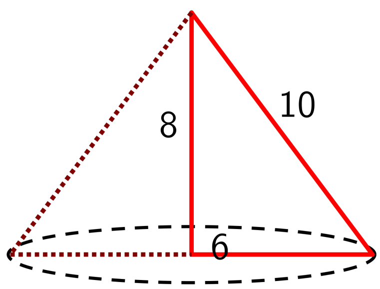
Volumenes al girar el triángulo:

1. sobre el cateto de longitud 6



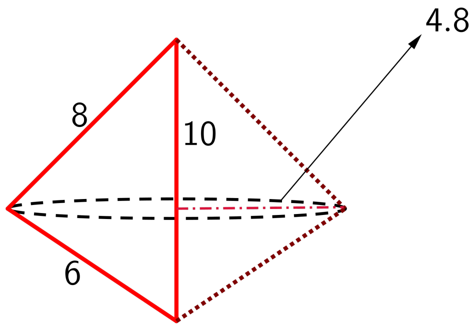
$A_T = \pi \cdot 8 \cdot 10 + \pi \cdot 8^2 = 144\pi$

2. sobre el cateto de longitud 8



$A_T = \pi \cdot 6 \cdot 10 + \pi \cdot 6^2 = 96\pi$

3. sobre la hipotenusa de longitud 10

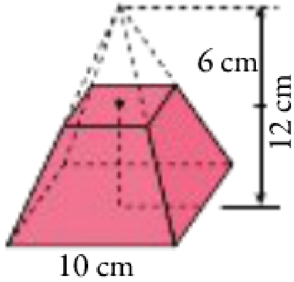


Se generan dos conos: ambos tienen como radio de la base 4.8 y generatrices 6 uno y 8 el otro.

$A_T = \pi \cdot 4{,}8 \cdot 8 + \pi \cdot 4{,}8^2 + \pi \cdot 4{,}8 \cdot 6 + \pi \cdot 4{,}8^2 = 113{,}28\pi$

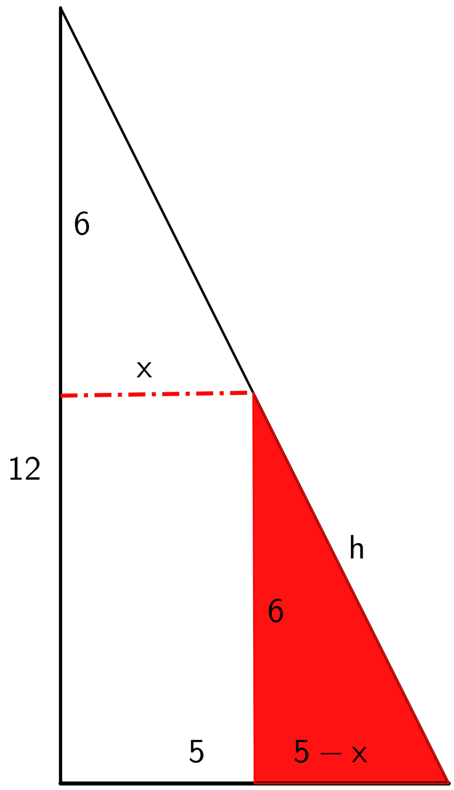
3. Ejercicio 39

39 Una pirámide regular de base cuadrada de 10 cm de lado y altura 12 cm es cortada por un plano a mitad de su altura. Halla el área total del tronco de pirámide resultante.



Solución

Si trazamos un segmento desde el centro de la base menor al centro de su lado obtenemos la siguiente figura:



Por semejanza de triángulos $\frac{6}{x} = \frac{12}{5} \Rightarrow x = \frac{5}{2} = 2{,}5$.

El segmento h del triángulo rojo corresponde a la altura del trapecio que compone la cara del tronco de pirámide, por el teorema de Pitágoras $h = \sqrt{2{,}5^2 + 6^2} = 6{,}5$. Los cuatro trapecios que componen el área lateral del tronco tienen como base mayor 10, base menor 5 y altura 6.5, el área total será:

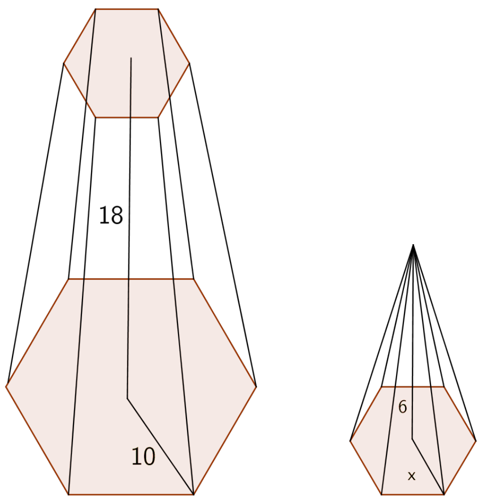
$$A_{total} = 4 \cdot \frac{10+5}{2} 6{,}5 + 10^2 + 5^2 = 320$$

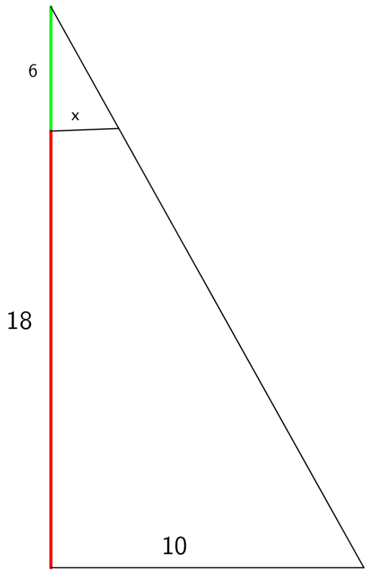
4. Ejercicio 40

40 La base de una pirámide regular es un hexágono de 10 cm de lado. Su altura es 24 cm.

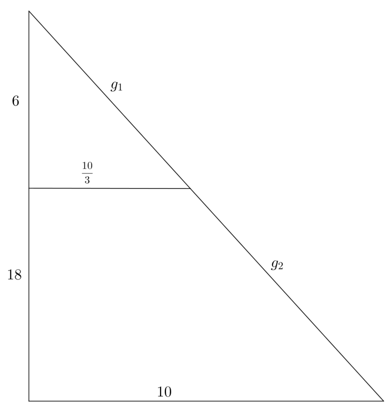
Se corta por un plano que pasa a 18 cm de la base. Halla el área total del tronco de pirámide que resulta.

Solución
A partir del enunciado construimos la siguiente figura:



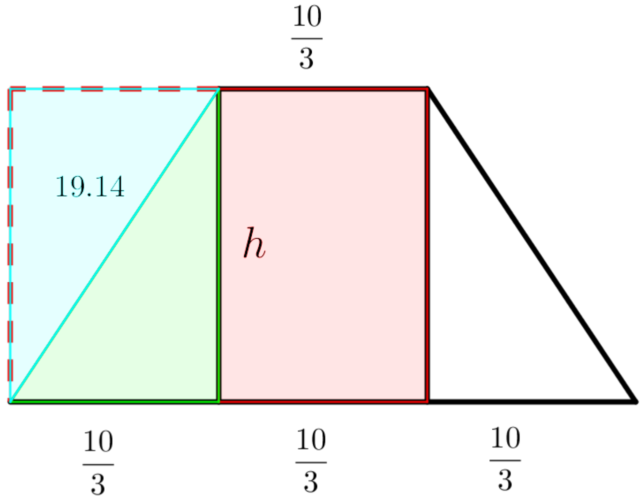


por semejanza de triángulos obtenemos $\frac{6}{x} = \frac{18}{10} \Rightarrow x = \frac{10}{3}$. El tronco de pirámide tiene por base mayor un hexágono de lado 10 cm. y por base menor un hexágono de lado $\frac{10}{3}$. Tenemos el triángulo:



Por tanto $g_1 = \sqrt{6^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2} = 6{,}86$; $g_1 + g_2 = \sqrt{24^2 + 10^2} = 26 \Rightarrow g_2 = 26 - 6{,}86 = 19{,}14$

Los seis trapecios que componen el àrea lateral son de la forma:



Se tiene que $h = \sqrt{19{,}14^2 - \left(\frac{10}{3}\right)^2} = 15{,}58$. El área lateral es $A_{Lateral} = 6 \cdot \frac{20}{3} \cdot 15{,}58 =$ $= 623{,}2$.

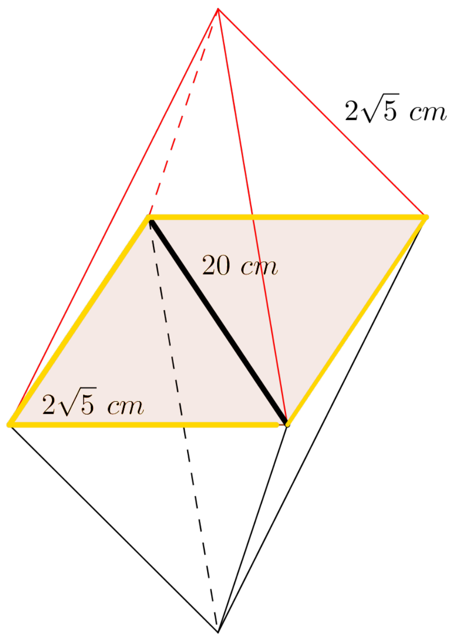
El área de un hexágono de lado l se puede descomponer como suma 6 áreas de un triángulo equilatero de lado l, cuya superficie es $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$(es fácil deducirlo. El área de un hexágono de lado l es $6 \cdot A = \frac{6l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2}$. El área total es:

$$A_{Total} = 623{,}2 + \frac{3 \cdot 10^2\sqrt{3}}{2} + \frac{3 \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$$

5. Ejercicio 41

41 Halla el área total de un octaedro en el que la distancia entre los vértices no contiguos es de 20 cm.

Del enunciado se desprende la siguiente figura:



De este modo la figura tiene 8 caras formadas por triángulos equiláteros de lado $l = 2\sqrt{5}$. Como el área de un triángulo equilátero de lado l es $A = \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}$, entonces $A_{total} = 8 \cdot \dfrac{20\sqrt{3}}{4} =$
$= 40\sqrt{3}$