UN EJERCICIO CURIOSO DEL LIBRO ELEMENTOS DE ÁLGEBRA ABSTRACTA DE A. CLARK

Se trata de definir en el intervalo abierto $(0,1)$ una ley de composición interna $\perp$ de forma que $[(0, 1), \perp]$ sea un grupo en el que el elemento simétrico de x sea $1-x$

SOLUCIÓN:

Consideremos la aplicación:

$$f : (0, 1) \longrightarrow (0, \infty)$$

definida como:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{f(1-x)} & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$

En primer lugar veamos que la aplicación está bien definida. Si $x=y$ pueden ocurrir dos casos, a saber:

- $0 < x=y < \frac{1}{2}$. Al ser $2x=2y \Rightarrow f(x)=f(y)$
- $\frac{1}{2} \leq x = y < 1$. Entonces $-1 < -x \leq -\frac{1}{2}$. Sumando 1 a cada término de la desigualdad obtenemos que $0 < 1-x \leq \frac{1}{2}$, con lo que $f(1-x) = 2(1-x)$.

Entonces si $\frac{1}{2} \leq x = y < 1$ se verifica que

$$\frac{1}{f(1-x)} = \frac{1}{2(1-x)} = \frac{1}{2(1-y)} = \frac{1}{f(1-y)} \Rightarrow f(x) = f(y)$$

Ya podemos afirmar que la aplicación está bien definida, aun más, podemos definirla de modo más claro como:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2(1-x)} & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$

Veamos que f es biyectiva:

i) f es exhaustiva, para ello hay que probar que $\forall y \in (0, +\infty)$ tenemos que encontrar $x \in (0, 1)$ tal que $f(x) = y$. Sea $y \in (0, +\infty)$. Se pueden dar dos casos:

a) Que $0 < y < 1$. Entonces $0 < \frac{y}{2} < \frac{1}{2}$, en este caso tomamos $x = \frac{y}{2}$ obteniendo que $f(x) = y$

b) Que $y \geq 1$. Entonces $\frac{1}{y} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2y} \leq \frac{1}{2}$. Si cambiamos a toda la expresión el signo se obtiene $-\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2y}$ y si ahora sumamos 1 a todos los términos $\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{2y} < 1$. Tomando $x = 1 - \frac{1}{2y}$ (observemos que esta elección de x es lícita ya que $1 - \frac{1}{2y} \in (0, 1)$). Se tiene entonces que:

$$f(x) = f\left(1 - \frac{1}{2y}\right) = \frac{1}{2\left[1 - \left(1 - \frac{1}{2y}\right)\right]} = \frac{1}{2\left(1 - 1 + \frac{1}{2y}\right)} = y$$

Ya podemos afirmar que f es exhaustiva.

ii) f es inyectiva. Para ello hay que probar que si $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$. Supongamos que $f(x) = f(y)$. Se pueden dar tres casos:

a) Que $0 < x < \frac{1}{2}$, $0 < y < \frac{1}{2}$. Entonces si $f(x) = f(y) \Rightarrow 2x = 2y \Rightarrow x = y$

b) Que $0 < x < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < y < 1$. Esto es imposible, si $f(x) = f(y) \Rightarrow 2x = \frac{1}{2(1-y)} \Rightarrow 1 - y = \frac{1}{4x} \Rightarrow y = 1 - \frac{1}{4x}$. Como se verifica que $0 < x < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < 4x \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{4x} \Rightarrow -\frac{1}{4x} \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow 1 - \frac{1}{4x} \leq 1 - \frac{1}{2}$, obtenemos que $y = 1 - \frac{1}{4x} \leq \frac{1}{2}$ ¡contradicción! ya que la elección que hemos hecho de y era $\frac{1}{2} \leq y < 1$. De igual forma podríamos afirmar que si $f(x)=f(y)$ no puede ser $\frac{1}{2} \leq x < 1$, $0 < y \leq \frac{1}{2}$

c) Que $\frac{1}{2} \leq x < 1$, $\frac{1}{2} \leq y < 1$ Si suponemos que $f(x) = f(y)$ entonces $\frac{1}{2(x-1)} = \frac{1}{2(y-1)} \Rightarrow x = y$. Ahora podemos afirmar que f es inyectiva.

De los apartados i), ii) se desprende que f es una biyección. Recordemos que el intervalo abierto $(0, +\infty)$ con la operación $\cdot$ (producto de números reales) es un grupo

Vamos a definir la operación $\perp: (0, 1) \times (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ dada por la expresión $x \perp y = f^{-1}[f(x) \cdot f(y)]$, donde f^{-1} es la aplicación inversa de f (que existe al ser f biyectiva) respecto a la composición de aplicaciones. Pues bien, se cumple que:

$$f(x \perp y) = f[f^{-1}(f(x) \cdot f(y))] = (f^{-1})[f(x) \cdot f(y)] = f(x) \cdot f(y)$$

Luego f es un isomorfismo, al conservar los isomorfismos la estructura de grupo, resulta que $[(0, 1), \perp]$ es un grupo, además este grupo es abeliano.

Miguel Galo Fernández - otoño de 2007