1 El Problema de Basilea

Fue formulado por Euler, se trata de hallar la suma de los inversos de los cuadrados de los números naturales.

1.1 Lema.

Sea P(x) un polinomio con término independiente no nulo, es decir $P(0) \neq 0$, con raíces no nulas $a_1, a_2, ..., a_n$. Entonces P(x) se puede factorizar de la *siguiente* forma $P(x) = P(0)(1 - \frac{x}{a_1})(1 - \frac{x}{a_2})....(1 - \frac{x}{a_n})$

Demostración

Según el teorema fundamental del álgebra, podemos factorizar el polinomio $P(x)$ como $P(x) = (x - a_1)(x - a_2)...(x - a_n)$. Por tanto $P(0) = (-a_1)(-a_2)...(-a_n)$. Si multiplicamos y dividimos la factorización de P(x) obtenemos:

$$P(x) = P(0)\frac{(x - a_1)(x - a_2)...(x - a_n)}{(-a_1)(-a_2)...(-a_n)} = P(0)(1 - \frac{x}{a_1})(1 - \frac{x}{a_2})...(1 - \frac{x}{a_n})$$

1.2 Teorema (Problema de Basilea)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Demostración

El desarrollo en serie de McLaurin de una función f(x) derivable indefinidamente en $x = 0$ viene dado por la expresión :

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + ... + \frac{1}{n!}x^n + ...$$

Vamos a restringirnos ahora a la función $f(x) = senx$

$f(0) = 0$, $f'(x) = cosx \Rightarrow f'(0) = 1$, $f''(x) = -sen(x) \Rightarrow f''(0) = 0$, $f'''(x) = -cosx \Rightarrow f'''(0) = -1$. Si nos fijamos observamos que si la derivada es par vale cero y si es impar ± 1. Aun podríamos afinar más, $f^{2n+1}(x) = (-1)^n cosx$. Luego el desarrollo de McLaurin de $senx$ es:

$$sen(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Para la función $P(x) = \frac{senx}{x}$ el desarrollo de McLaurin es:

$$P(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

Observemos que $P(0) = 1 \neq 0$ y que las raíces de este polinomio son los múltiplos de π, es decir $x = n\pi \neq 0$. Según se establece en el lema:

$$P(x) = (1 - \frac{x}{\pi})(1 - \frac{x}{-\pi})(1 - \frac{x}{2\pi})(1 - \frac{x}{-2\pi})(1 - \frac{x}{3\pi})(1 - \frac{x}{-3\pi})...$$

o lo que es lo mismo:

$$P(x) = (1 - \frac{x^2}{\pi^2})(1 - \frac{x^2}{4\pi^2})(1 - \frac{x^2}{9\pi^2})...$$

Entonces, igualando expresiones de $P(x)$, obtenemos:

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + ... = (1 - \frac{x^2}{\pi^2})(1 - \frac{x^2}{4\pi^2})(1 - \frac{x^2}{9\pi^2})...$$

Si dos polinomios son iguales, los coeficientes de los términos del mismo grado también lo son, con lo que:

$$-\frac{x^2}{3!} = -\frac{x^2}{\pi^2} - \frac{x^2}{4\pi^2} - \frac{x^2}{9\pi^2} + ... \Rightarrow \frac{1}{3!} = \frac{1}{\pi^2}(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ...) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$