Aritmética de lápiz y papel

Miguel Galo Fernández

13 de enero de 2017

Defiende tu derecho a pensar porque, incluso pensar de manera errónea, es mejor que no pensar

HIPATÍA DE ALEJANDRÍA

Índice de Contenidos

1. Introducción

Mucho se discute y opina sobre el fracaso de la enseñanza en general y particularmente en las matemáticas. La mala calidad de los conocimientos matemáticos de los alumnos tienen su origen en los bajos contenidos que se exigen y el recurso, siempre fácil del manejo del recetario de algoritmos a los que se les da valor de verdad sin ningún tipo de discusión, y a los que se recurre para aplicarlos a un discutido ejemplo práctico. Matizo lo de discutido porque en muchas ocasiones el alumno percibe una situación absurda en vez de práctica ante un problema que se le plantea, como por ejemplo en el típico ejercicio: "Si una camisa y un jersey valen 50 €, y tres camisas y 5 jersey valen 175 €, ¿cuál es el precio del jersey y el de la camisa?". La mayoría de los alumnos piensan que hay maneras más eficaces de establecer el precio del jersey y la camisa que la expuesta. Para que la actividad matemática tenga consistencia es imprescindible que se sepan justificar los conocimientos que se vayan adquiriendo.

2. La justificación de la regla de los signos

La interpretación de los enteros positivos se hacía mediante el símil de ingresos en nuestro patrimonio mientras que los números negativos suponían deudas. Así si nuestro patrimonio es de 6 € y debemos 4 €, en realidad tenemos 6+(-4)=6-4=2 €. Lo mismo podemos decir si en vez de deber 4 €recibimos 4 €por un trabajo realizado, nuestro patrimonio será ahora 6+4=10 €. Por último, si debíamos 6 €y ahora generamos otra deuda de 4 €, la deuda que tenemos es (-6)+(-4)=-6-4=-10 €. ¿Podríamos extender esta justificación al producto de enteros? Veamos. El producto de los enteros 6 x 5 = 30 podríamos entenderlo como 6 ingresos de 5 €. Si se tratara de (-6) x5 se entendería que tenemos 6 deudas de 5 €lo que totalizaría una deuda de (-6) x 5 = - 30 €. Hasta ahora todo funciona, + x + = +, + x - = - x + = - pero, ¿cómo podemos justificar la regla - x - = +?. Con el recurso de ingresos/deudas no es posible. Sean los enteros a, b, c y d. Supongamos que $a > b$ y que $c > d$. Generamos los rectángulos de la figura que a continuación ponemos:

Se tiene que (a-b)(c-d)=ac-bc-ad+bd (hemos restado dos veces bd, por eso lo sumamos). Si aplicamos la propiedad distributiva: (a-b)(c-d)=ac-ad-bc-b(-d)=ac-bc-ad+bd con lo que $-b(-d) = +bd$, esto puede justificar la regla del signo menos $-x- = +$

3. Cuidado con la inducción

En la mayor parte de los casos las matemáticas emplean el método deductivo que consiste en resolver un problema particular empleando una ley general. El método inductivo consiste en deducir una ley general a partir de unos casos particulares. Veamos un ejemplo. Consideremos polinomios de la forma $x^2 + x + p$ siendo p un número primo. Demos por ejemplo a p el valor 11, tendremos el polinomio $P(x) = x^2 + x + 11$. Damos valores y obtenemos la siguiente tabla:

Observemos que todos los valores de P(x) obtenidos son primos.

Si ahora hacemos p=41 el polinomio se convierte en $P(x) = x^2 + x + 41$. Dando de nuevo valores obtenemos de la tabla 2 y de nuevo todos los valores de P(x) obtenidos son primos. ¿Podemos afirmar que los polinomios $P(x) = x^2 + x + p$ siendo p primo son generadores de números primos para los distintos valores de x? Por desgracia no lo podemos afirmar. Por ejemplo en el polinomio $P(x) = x^2 + x + 41$ si damos a x el valor 41 obtenemos $P(41) = 41^2 + 41 + 41 = 41(41 + 1 + 41) = 41 \cdot 83$ que no es primo. Nos surge ahora el problema de saber cuantas comprobaciones hemos de hacer para poder afirmar la veracidad de este tipo de propiedades. Para contestar a esta cuestión se establece el principio de inducción que establece:

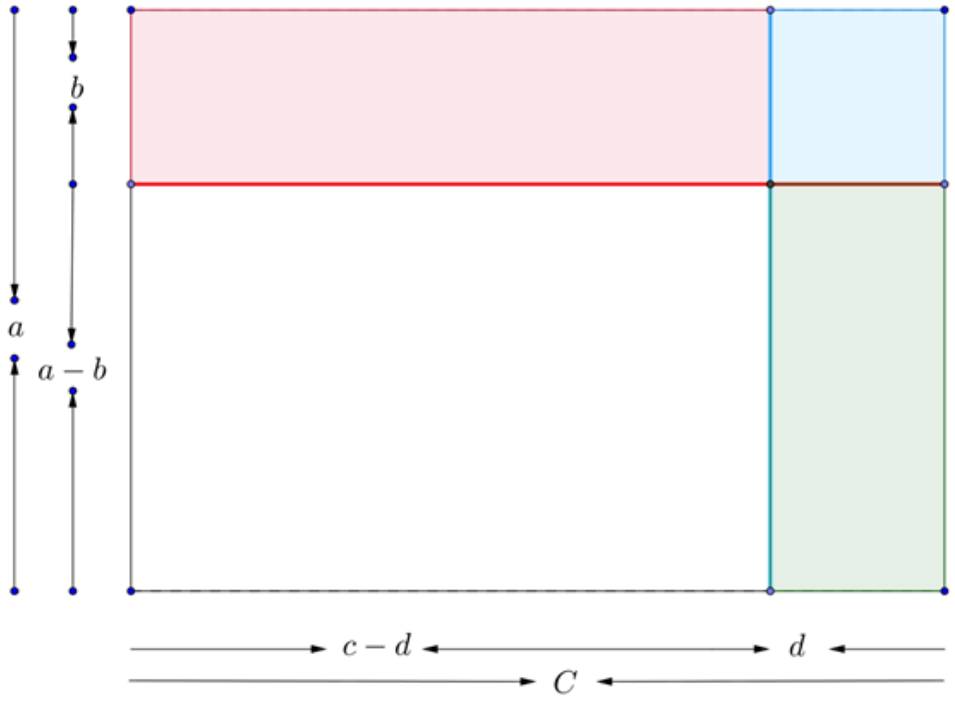

Figura 1: La regla de los signos

Cuadro 1: Generamos numeros primos

x	P(x)
0	11
1	13
2	17
3	23
4	31
5	41
6	53
7	67
8	83

1º Una propiedad P depende del número natural n, es decir P=P(n)
2º Si P(1) es cierta, es decir P se verifica para n=1
3º Suponemos que P se verifica para n=k, es decir P(k) es cierta
4º Demostramos que P se verifica para n=k+1, es decir demostramos que P(k+1) es cierta
Entonces P es cierta $\forall n \in \mathbb{N}$

Cuadro 2: Generamos más números primos

x	P(x)
0	41
1	43
2	47
3	53
4	61
5	71
6	83
7	97
8	113
9	131
10	151
11	173

¿Es cierto que la suma de los n primeros números naturales se puede calcular mediante la expresión $1+2+3+...+n=\frac{n^2+n}{2}$? Llamemos $P(n) \equiv$ suma de los n primeros números naturales.

Para n=1, $P(1)=\frac{1^2+1}{2}=1$ es cierta

Suponiéndola cierta para n=k, es decir $1+2+3+...+k=\frac{k^2+k}{2}$, vamos a demostrarla para n=k+1.

$P(k+1)=1+2+3+...+k+(k+1)=(1+2+3+...+k)+k+1$. Por hipótesis de inducción hemos admitido que $1+2+3+...+k=\frac{k^2+k}{2}$. Por lo tanto tenemos que:

$P(k+1)=1+2+3+...+k+(k+1)=(1+2+3+...+k)+k+1==\frac{k^2+k}{2}+k+1=\frac{k(k+1)}{2}+\frac{2(k+1)}{2}=\frac{k^2+3k+2}{2}=\frac{(k+1)^2+k+1}{2}$ que es lo que queríamos demostrar. Podemos afirmar que la propiedad es cierta.

Podríamos pensar que en el principio de inducción se puede obviar el paso 1º, es decir para establecer la validez de la propiedad bastaría con demostrar que esta se verifica siempre para el siguiente número natural. Veamos que pasa con un ejemplo. Sea la propiedad $P(n) \equiv$ todo número natural es igual a su siguiente. Prescindimos del paso 1º, suponemos que la propiedad es cierta para n=k, es decir k=k+1. Demostramos la propiedad para n=k+1, es decir que k+1=k+2. Por hipótesis de inducción tenemos que K=k+1, por tanto k+1=(k+1)+1=k+2. Pero esto es falso, nos es imprescindible dar el paso 1º

4. El algoritmo de la resta

Hay un montón de ejemplos que ponen de manifiesto la inutilidad de enseñar algoritmos a modo de recetario para hacer cálculos, eso dejó de ser necesario hace mucho tiempo ya (desde que aparecieron las calculadoras). Es necesario que se enseñe el algoritmo de la resta pero desde otro punto de vista. Por ejemplo si queremos restar a 312 el valor 234, con el algoritmo de la resta que nos enseñaron en la escuela lo resolveríamos del siguiente modo: de 4 a 12 ocho y me llevo 1 y 3 hacen 4 hasta 11 siete y me llevo 1 y 2 hacen 3 hasta tres 0. el resultado de la resta es 078 es decir 78. La mayoría de los niños de 5º de Primaria sabrían hacer la operación anterior empleando el algoritmo pero, ¿sabrían lo que están haciendo? ¿No sería mejor emplear una

calculadora?¿Qué ventajas tiene hacer el cálculo con lápiz y papel en vez de con calculadora? Proponemos el siguiente problema:

Sea abc un número de tres cifras no capicúa. Supongamos sin pérdida de generalidad que a¿c (si no fuera así consideraríamos el número entero cba y procederíamos de la misma forma que a continuación señalamos). Al efectuar la resta abc - cba se obtiene un número txz. Entonces la suma txz + zxt es un número siempre constante.

El algoritmo de la resta se basa en la propiedad de que al sumar una misma cantidad al minuendo y al sustraendo la diferencia no varía, es decir x-y=(x+z)-(y+z). Vamos a justificar el algoritmo cuando hemos realizado la resta 312-234.

$$\begin{array}{rccc} & 3 & 1 & 2 \\ - & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

No podemos realizar la resta tal y como está porque a 2 unidades no podemos restarle 4 unidades. Aprovechando la propiedad mencionada sumamos al minuendo 10 unidades y al sustraendo 1 decena que es lo mismo quedándonos la expresión de la resta como:

$$\begin{array}{rccc} & 3 & 1 & 10+2 \\ - & 2 & 3+1 & 4 \end{array}$$

Ahora tenemos el inconveniente de que no podemos restarle a 1 decena cuatro decenas, para ello sumamos diez decenas al minuendo y una centena al sustraendo quedándonos finalmente la expresión:

$$\begin{array}{rccc} & 3 & 11 & 12 \\ - & 3 & 4 & 4 \\ & 0 & 7 & 8 \end{array}$$

Volvamos al problema propuesto anteriormente. En primer lugar tenemos que hallar el número txz resultante de efectuar abc-cba

Nos encontramos con el problema de no poder restar las unidades. Hacemos lo mismo que con el ejemplo numérico:

Ahora tenemos el inconveniente de no poder restar las decenas, añadimos 10 decenas al minuendo y una centena al sustraendo boteniendo finalmemte:

ya tenemos el número txz, t=a-c-1, x=9, z=c+10-a. Si sumamos txz y zxt obtenemos:

$$\begin{array}{rccc} & \text{a-c-1} & 9 & \text{c+10-a} \\ - & \text{c+10-a} & 9 & \text{a-c-1} \\ & 9 & 18 & 9 \end{array}$$

Al sumar txz+zxt obtenemos un número con 9 centenas, 18 decenas y 9 unidades, este numero es 1089.

	a	b	c
-	c	b	a

	a	b	c+10
-	c	b+1	a

5. No se puede prescindir de la teoría de conjuntos

Ninguna persona honesta puede negar que para entender los conceptos que fundamentan las matemáticas es imprescindible la teoría de conjuntos. En la mayoría de los libros de texto de 4º de ESO, cuando se define el concepto de función, se dicen imprecisiones como *una función liga dos variables a las que habitualmente se les llama x e y; x es la variable independiente e y es la variable dependiente. La función, que se suele denotar por y=f(x) asocia a cada valor de x un único valor de y:* $x \longrightarrow y = f(x)$. Esta definición provoca un montón de preguntas, ¿qué se entiende por ligar dos variables?, ¿qué es una variable?, ¿qué son las variables independientes?, ¿y las dependientes?. ¿Qué se quiere decir con esa flecha?. Todas estas preguntas surgen porque en la definición se ha usado un lenguaje impreciso, el peor error que se puede cometer cuando se quiere transmitir conocimiento. ¡Ah!, las prisas para la fórmula uno, el tour de Francia, etc. En la enseñanza no cabe la prisa sino el buen hacer, de modo que en un curso si se tienen que programar menos contenidos hay que hacerlo en aras a la calidad de los conocimientos, no a la cantidad de los mismos. Volviendo a lo que nos ocupa vamos a intentar dar una definición precisa de lo que es una función.

5.1. Producto cartesiano de conjuntos

Sean A y B dos conjuntos. El producto cartesiano de A por B, que se denota por AXB, es el conjunto formado por todos los pares ordenados cuyo primer elemento es del conjunto A, siendo el segundo elemento perteneciente al conjunto B, es decir:

$$AXB = \{(x, y) : x \in A,\ y \in B\}$$

Por ejemplo si $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{1, 2\}$ entonces $AXB = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$

5.2. Relaciones entre conjuntos

Sean A y B dos conjuntos. Una relación de A hacia B es un criterio que permite asociar elementos de A con elementos de B. Por ejemplo, sea $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 4\}$ y sea $B = \{0, 1, 4, 9\}$. La relación $\mathfrak{R}$ es el criterio "ser cuadrado de" puede representarse mediante el diagrama siguiente, llamado diagrama de Venn:

Sea $\mathfrak{R}$ una relación del conjunto A hacia el conjunto B. Si $a \in A$ está relacionado con $b \in B$ escribimos $a\mathfrak{R}b$. Llamamos grafo de la relación $\mathfrak{R}$ al siguiente subconjunto del producto cartesiano:

$$G = \{(a, b) \in AXB : a\mathfrak{R}b\}$$

	a	b+10	c+10
-	c+1	b+1	a
	a-c-1	9	c+10-a

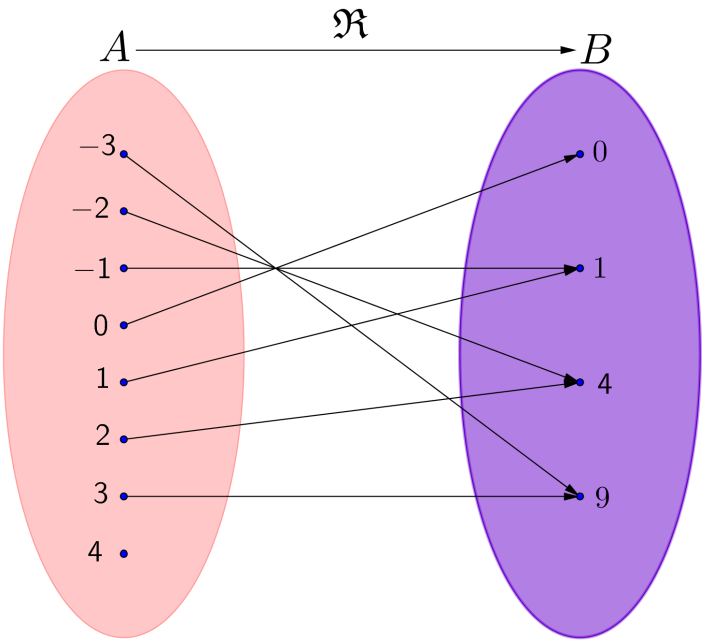

Figura 2: Relación de A hacia B

5.3. Aplicaciones

Una aplicación del conjunto A en el conjunto B es una relación de A hacia B que representaremos por

$$\begin{array}{rccc} \text{f:} & \text{A} & \longrightarrow & \text{B} \\ & x & \longrightarrow & f(x) \end{array}$$

verificando las siguientes propiedades:

1ª Todo elemento del conjunto A está relacionado con un elemento del Conjunto B. El elemento del conjunto B que se relaciona con el elemento x del conjunto A lo representamos por $f(x)$. Si llamamos G al grafo de la aplicación, formalmente esta propiedad la podemos expresar como $\forall x \in A,\ \exists f(x) \in B\ :\ (x, f(x)) \in G$

2ª Cada elemento de A se relaciona con uno y solo un elemento de B, formalmente se expresaría $f(x) \neq f(y) \Rightarrow x \neq y$

Ejemplo.- El criterio $\mathfrak{R} \equiv$ "raíz cuadrada de" del conjunto $A = \{-1, 0, 1, 4, \}$ hacia el conjunto $B = \{-1, 0, 1, 2, 5\}$ no es aplicación. Lo representamos en un diagrama de Venn:

Hay dos razones para afirmar que f no es aplicación: los elementos $-1, 2 \in A$ no están relacionados con ningún elemento del conjunto B, y hay un elemento $1 \in A$ que está relacionado con dos elementos del conjunto B.

A las aplicaciones entre conjuntos de números reales se les llama funciones .

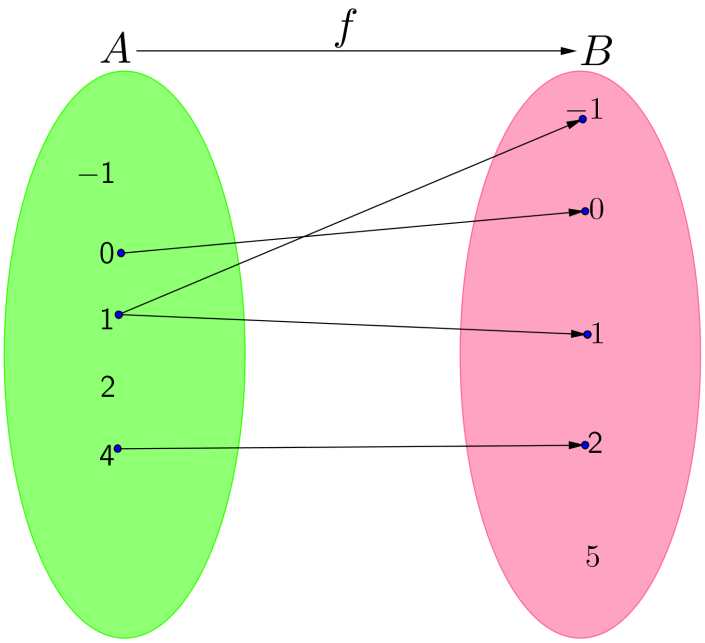

Figura 3: f no es aplicación

6. Un poco de teoría de números

Sean m y n dos números enteros. Se dice que m es divisor de n y se escribe $m|n$ si existe un tercer entero c de modo que $n = m \cdot c$. En este caso también se dice que m divide a n o que n es múltiplo de m.

Propiedades:

1. $\forall n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n|0$, esto es así ya que $0 = n \cdot 0$
2. $\forall n \in \mathbb{Z} \Rightarrow 1|n$ ya que $n = 1 \cdot n$
3. $\forall n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n|n$ ya que $n = n \cdot 1$
4. $\forall m, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow m|m \cdot n$
5. $\forall m, n, k \in \mathbb{Z}$ si $m|n \Rightarrow m \cdot k|n \cdot k$
6. $\forall m, n, k \in \mathbb{Z}$ *si* $m|n \Rightarrow m|n^k$
7. $\forall m, n, k \in \mathbb{Z}$ *si* $m|n$ *y* $n|k \Rightarrow m|k$. Demostremos esta propiedad. Si $m|n \Rightarrow \exists c_1$ *tal que* $n = c_1 \cdot m$, si $n|k \Rightarrow \exists c_2$ *tal que* $k = c_2 \cdot n \Rightarrow K = c_2 \cdot c_1 \cdot m$ Llamando $c = c_2 \cdot c_1$ queda $k = c \cdot m \Rightarrow m|k$
8. Sean $m, n, r \in \mathbb{Z}$ tales que $r|m,\ r|n$. Entonces $r|(m+n)$. Demostremos esta propiedad, si $r|m \Rightarrow \exists c_1 \in \mathbb{Z}$ *talque* $m = r \cdot c_1$. Por la misma razón si $r|n \Rightarrow \exists c_2 \in \mathbb{Z}$ *talque* $n = r \cdot c_2$. Por tanto $m + n = r \cdot (c_1 + c_2) \Rightarrow r|(m + n)$
9. $m|n \Leftrightarrow |a| \mid |b|$, $m| - n$, $-m|n$
10. $m|n$ y $n|m \Leftrightarrow |a| = |b|$ Los enteros que cumplen esta propiedad se llaman asociados. El asociado de un entero $m \in \mathbb{Z}$ es $-m \in \mathbb{Z}$.

También se deduce de la propiedad 9. que la divisibilidad de números enteros es consecuencia de la de los números positivos, de modo que en todo lo que sigue trataremos tan solo con números positivos.

Un número entero $m \in \mathbb{Z}$ se dice primo si sus únicos divisores son -1, 1, -m, m, es decir que si nos referimos tan solo a números positivos un número primo es aquel que tiene por divisores a la unidad y al propio número.

sean $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{Z}$. Se define el máximo común divisor de estos números como el mayor de sus divisores comunes. Se representa por $m.c.d.(x_1, x_2, ..., x_n)$. Si el máximo común divisor de dos o más números es la unidad los números se dicen primos entre sí.

Proposición 1 *Sean $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $m|n$. Entonces $m.c.d.(m, n) = m$*

Demostración:
El mayor divisor de m es él mismo y como también lo es de n, el mayor divisor común de m y n es por tanto m.

7. Algoritmo de Euclides

Sean $m, n \in \mathbb{Z}$, siendo $m > n$. Entonces existen dos números enteros $c, r \in \mathbb{Z}$ tales que:

- $m = n \cdot c + r$
- $r < n$

Este es el algoritmo de la división. A c se le llama cociente de la división de m entre n y a r se le llama resto.

Proposición 2 *Sean $m, n \in \mathbb{Z}$, siendo $m > n$, y sean c, r el cociente y el resto respectivamente de la división de m entre n. Entonces se verifica si $d|m,\ y\ d|n \Rightarrow \Rightarrow d|r = m - nc$*

Demostración:
Como $d|m,\ y\ d|n \Rightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}$ *tal que* $m = d \cdot \alpha_1,\ n = d \cdot \alpha_2$. Por tanto $r = m - n \cdot c = d \cdot \alpha_1 - d \cdot \alpha_2 \cdot c = d \cdot (\alpha_1 - \alpha_2 \cdot c) \Rightarrow d|r$

Hemos demostrado que $m.c.d.(m, n) = m.c.d.(n, r)$. Si reiteramos el proceso aplicando lo mismo al par n, r, sean c_1, r_1 el cociente y el resto al dividir n entre r. Entonces $m.c.d.(n, r) = m.c.d.(r, r_1)$. Sean c_2, r_2 el cociente y el resto al dividir r entre r_1. Entonces $m.c.d.(r, r_1) = m.c.d.(r_1, r_2)$. Generamos así una sucesión $n > r > r_1 > .... > r_{k-1} > r_k > ...$ esta sucesión decreciente de términos no nulos llegará un momento que sea cero. Si por ejemplo $r_k = 0$ entonces $m, c.d.(m, n) = m.c.d.(r_{k-1}, 0) = r_{k-1}$, este es el algoritmo de Euclides para calcular el máximo común divisor. Veamos un ejemplo, calcular $m.c.d.(5000, 2204)$

Cuadro 3: Algoritmo de Euclides para hallar m.c.d.

Cociente		2	3	1	2	1	1	1	1	3	2
	5000	2204	592	428	164	100	64	36	28	8	4
resto	592	428	164	100	64	36	28	8	4	0	

Entonces $m.c.d.(5000, 2204) = m.c.d.(4, 0) = 4$

Proposición 3 *Si $m.c.d.(m, n) = d \Rightarrow m.c.d.(k \cdot m, k \cdot n) = K \cdot d$*

Demostración:

Supongamos que $m > n$ y que c, r son el cociente y el resto al dividir m entre n. Entonces $m = c \cdot n + r \Rightarrow k \cdot m = (c \cdot k) \cdot n + k \cdot r$. Luego $m.c.d.(k \cdot m, k \cdot n) = m.c.d.(k \cdot n, k \cdot r)$. Reiterando el proceso según el algoritmo de Euclides, Si el último resto nulo es $r_t = 0$ entonces $m.c.d.(k \cdot m, k \cdot n) = k \cdot r_{t-1} = k \cdot m.c.d.(m, n)$

Proposición 4 *Si $k|m$ y $k|n$ entonces $m.c.d.(m : k, n : k) = d : k$. De esta propiedad también se deduce que $k|m$ y $k|n \Longleftrightarrow k|m.c.d.(m, n)$*

Proposición 5 *Sean $m, n \in \mathbb{Z}$. Sea $d = m.c.d.(m, n)$. Entonces los enteros $a = \frac{m}{d}$ y $b = \frac{n}{d}$ son primos entre sí*

Demostración:

Según la proposición anterior $m.c.d.(m : d, n : d) = m.c.d.(a, b) = \frac{d}{d} = 1$

Teorema 6 *(de Euclides)*

Si un número entero divide al producto de otros dos y es primo con uno de ellos entonces divide al otro, de manera formal si $k|m \cdot n$ y $m.c.d.(m, k) = 1 \Rightarrow k|n$

Demostración:

Como $m.c.d.(m, k) = 1 \Rightarrow m.c.d.(m \cdot n, k \cdot n) = n$. Por hipótesis $k|m \cdot n$ y como $k|k \cdot n$ entonces k ha de dividir al $m.c.d.(m \cdot n, k \cdot n) = n$.